Übungen zu Fana2 WS11, 1. Übung

1. Zeige: Für Elemente x, y einer Algebra mit Einselement gilt
$$\sigma(xy) \setminus \{0\} = \sigma(yx) \setminus \{0\}.$$
Hinweis: Man zeige $(\lambda e - yx)y(\lambda e - xy)^{-1}x = yx$ und leite daraus die Inverse von $(yx - \lambda e)$ ab.

2. Zeigen Sie, dass der Raum
$$\ell_1(\mathbb{Z}) := \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| < +\infty\}$$
aller absolut summierbaren komplexen Doppelfolgen versehen mit
$$\|(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}\|_1 := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|$$
sowie mit der Abbildung
$$* : ((a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (b_n)_{n\in\mathbb{Z}}) \mapsto (c_n)_{n\in\mathbb{Z}} =: (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} * (b_n)_{n\in\mathbb{Z}},$$
wobei
$$c_n = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j b_{n-j},$$
eine kommutative Banachalgebra mit Eins ist. Bestimmen Sie dabei das Einselement, geben Sie an, in welchem Sinne $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| < +\infty$ zu verstehen ist, und zeigen Sie, dass $\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j b_{n-j}$ für jedes n sogar absolut konvergiert.

3. Zeigen Sie, dass der Raum $A(\mathbb{T})$ aller komplexwertigen, nach dem Bogenmaß μ integrierbaren Funktionen f mit absolut konvergenten Fourierkoeffizienten $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, dh.
$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\zeta)\, \zeta^{-n}\, d\mu(\zeta),$$
mit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n| < +\infty$, versehen mit $\|f\| := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n|$ und mit der punktweisen Multiplikation eine Banachalgebra mit Eins ist, die vermöge der Abbildung $\theta : \ell_1(\mathbb{Z}) \to A(\mathbb{T})$ $(\subseteq L^1(\mathbb{T}, \mathfrak{B}(\mathbb{T}), \mu))$,
$$\theta((a_n)_{n\in\mathbb{Z}})(\zeta) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, \zeta^n$$
isometrisch isomorph zu $\ell_1(\mathbb{Z})$ aus dem letzten Beispiel ist. In welchem Sinne konvergiert hier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, \zeta^n$? Zeigen Sie schließlich, dass $A(\mathbb{T}) \subseteq C(\mathbb{T})$.

4. Ist A eine Algebra (über $\mathbb{C}$), so sei $\tilde{A} := A \times \mathbb{C}$ versehen mit der Multiplikation
$$\Big((a, \alpha), (b, \beta)\Big) := (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta).$$
Man zeige, dass $\tilde{A}$ eine Algebra mit Einselement ist, und man bestimme letzteres. Zeigen Sie auch, dass A eine Unteralgebra von $\tilde{A}$ ist, wenn man a mit $(a, 0)$

identifiziert. Ist ein $a \in A$ als Element von $\tilde{A}$ invertierbar? Weiters zeige man, dass A genau dann kommutativ ist, wenn A es ist.

Schließlich zeige man, dass wenn A eine Banachalgebra ist, auch $\tilde{A}$ versehen mit der Norm $\|(a,\lambda)\| := \|a\| + |\lambda|$ eine solche ist, die A isometrisch enthält, wenn man wieder a mit $(a, 0)$ identifiziert.

Welche Norm hat dabei das Einselement von $\tilde{A}$. Ist dabei A eine Banach-$*$-Algebra, so zeige man noch, dass dann auch $\tilde{A}$ mit einer Involution zu einer Banach-$*$-Algebra gemacht werden kann! Für die Definition einer Banach-$*$-Algebra siehe Skriptum, Anfang des Kapitels über C^*-Algebren.

5. Ist A eine Algebra, so heißt $x \in A$ pseudo-invertierbar, wenn $xy + x + y = yx + x + y = 0$ für ein gewisses $y \in A$.

   Zeigen Sie im Fall, dass A ein Einselement hat, $(e + x) \in \mathrm{Inv}(A)$ genau dann, wenn x pseudo-invertierbar ist.

   Mit der Notation aus dem letzten Beispiel zeigen Sie schließlich, dass im Fall, dass A ein Einselement hat, für ein $a \in A$ gilt, dass $\sigma_A(a) \setminus \{0\} = \sigma_{\tilde{A}}(a) \setminus \{0\}$ und dass $r_A(a) = r_{\tilde{A}}(a)$.

6. Sei $C^1[0, 1]$ die Menge aller stetig differenzierbaren, komplexwertigen Funktionen auf $[0, 1]$ versehen mit

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty,$$

   und mit der punktweisen Multiplikation. Man zeige, dass $C^1[0, 1]$ eine kommutative Banachalgebra mit Eins ist. Weiters betrachte man das Element $g \in C^1[0, 1]$ definiert durch $g(t) = t$, und bestimme man $\|g\|$ sowie $r(g)$.

7. Sei Ω eine Menge und sei $B(\Omega)$ die Menge aller beschränkten, komplexwertigen Funktion versehen mit $\|.\|_\infty$, mit der punktweisen Multiplikation und mit der Konjugation.

   Bezeichnet $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω, so sei $B(\Omega, \mathcal{A})$ die Menge aller $\mathcal{A}$-messbaren f aus $B(\Omega)$. Zeigen Sie, dass $B(\Omega)$ eine C^*-Algebra mit Eins ist, und dass $B(\Omega, \mathcal{A})$ eine Unter-C^*-Algebra von $B(\Omega)$ ist.

   Man bestimme für ein $f \in B(\Omega)$ das Spektrum $\sigma(f)$ und den Spektralradius $r(f)$.

   Ist Ω mit einer Topologie $\mathcal{T}$ versehen und ist $\mathcal{A} = \mathfrak{B}(\Omega)$ die auf Ω von $\mathcal{T}$ erzeugte σ-Algebra, so zeige man auch, dass der Raum $C(\Omega)$ aller stetigen f aus $B(\Omega)$ wiederum ein Unter-C^*-Algebra von $B(\Omega, \mathcal{A})$ ist.

   Für die Definition einer C^*-Algebra siehe Skriptum, Anfang des Kapitels über C^*-Algebren.

8. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wird $L^\infty(\mu)$ versehen mit dem wesentlichen Supremum als Norm, so zeige man, dass auch $L^\infty(\mu)$ eine C^*-Algebra ist.

   Zeigen Sie weiter, dass $L^\infty(\mu)$ isometrisch isomorph zu $B(\Omega, \mathcal{A})/I$ ist, wobei $I \trianglelefteq B(\Omega, \mathcal{A})$ das abgeschlossene Ideal (Begründung !) aller $f \in B(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\mu(\Omega \setminus f^{-1}\{0\}) = 0$ ist.

   Für $f \in L^\infty(\mu)$ zeige man schließlich, dass

$$\sigma(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \forall \epsilon > 0 \Rightarrow \mu(f^{-1}(U_\epsilon(\lambda))) > 0\}.$$

9. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum, und sei $C(X)$ die C^*-Algebra aller komplexwertigen, beschränkten und stetigen Funktionen darauf.

   Ist I ein echtes Ideal auf $C(X)$, so weise man die Existenz eines $x \in X$ nach, sodass $f(x) = 0$ für alle $f \in I$.

   Hinweis: Leiten sie aus dem Gegenteil mit einem Überdeckungsargument ab, dass es ein invertierbares $f \in I$ gibt.