Übungen zu Fana2 WS11, 2. Übung

1. Seien X, Y Banachräume und $u : X \to Y$ beschränkt und linear. Angenommen es gibt einen abgeschlossenen Teilraum Z von Y, sodass $Y = u(X) \dot{+} Z$, so zeige man, dass $u(X)$ abgeschlossen ist, und dass es eine beschränkte lineare Projektion $p : Y \to Y$ gibt, dh. $pp = p$, die $u(X)$ als Bild hat.

   Zeigen Sie weiters, dass für lineare und beschränkte $u : X \to Y$ mit $\operatorname{codim}_Y u(X) < +\infty$ das Bild $u(X)$ immer abgeschlossen ist.

   Hinweis: Betrachten die die Abbildung $(X/\ker u) \times Z \to Y,\ (x + \ker u, z) \mapsto u(x) + z$.

2. Seien X, Y Banachräume. Eine lineare und beschränkte Abbildung $u : X \to Y$ heißt Fredholmsch, wenn u einen endlichdimensionalen Kern und einen Bildbereich mit endlicher Kodimension hat.

   Man zeige, dass alle Fredholmschen $u : X \to Y$ eine Quasiinverse $v : Y \to X$ im folgenden Sinn haben: v ist linear, beschränkt und Fredholmsch derart, dass sowohl $I_Y - uv$ als auch $I_X - vu$ sind endlichdimensionale Operatoren, dh. haben einen Kern mit endlicher Kodimension, oder äquivalent dazu, haben einen Bildbereich mit endlicher Dimension. I_X bzw. I_Y stehen für die Identitäten auf X bzw. Y.

   Bemerkung: Aus der Funktionalanalysis ist bekannt, dass alle Operatoren der Form $\lambda I + K : X \to X$ mit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und kompakten $K : X \to X$ Fredholmsch sind.

3. Sei X ein Banachraum und bezeichne $\mathcal{K}(X)$ den Raum aller kompakten Operatoren $K : X \to X$.

   Zeigen Sie, dass $\mathcal{K}(X)$ ein abgeschlossenes Ideal der Banachalgebra $B(X)$ ist.

   Für ein $u \in B(X)$ definiert man $\sigma_{ess}(u)$ als das Spektrum $\sigma(u + \mathcal{K}(X))$ von $u + \mathcal{K}(X)$ in der Banach-Algebra $B(X)/\mathcal{K}(X)$.

   Man zeige, dass $\sigma_{ess}(u) \subseteq \sigma(u)$, und dass folgende Aussagen äquivalent sind

   - $\lambda \notin \sigma_{ess}(u)$.
   - Für geeignete $v \in B(X)$ und $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(X)$ gilt $(\lambda I - u)v = I + K_1$. und $v(\lambda I - u) = I + K_2$.
   - $(\lambda I - u)$ ist Fredholmsch.

4. Betrachte die Abbildung $f \mapsto \overline{f}$ auf $A(\mathbb{T})$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (\overline{a}_{-n})_{n\in\mathbb{Z}}$ auf $\ell_1(\mathbb{Z})$. Man zeige, dass dann $\theta((\overline{a}_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = \overline{\theta((a_n)_{n\in\mathbb{Z}})}$ und dass $A(\mathbb{T})$ und $\ell_1(\mathbb{Z})$ mit dieser Abbildung beide Banach-$*$-Algebren aber keine C^*-Algebren sind.

5. Zeigen Sie, dass für jedes $\eta \in \mathbb{T}$ die Abbildung $m_\eta : A(\mathbb{T}) \to \mathbb{C},\ f \mapsto f(\eta)$ ein multiplikatives lineares Funktional ist.

   Zeigen Sie umgekehrt, dass jedes multiplikative lineare Funktional auf $A(\mathbb{T})$ von der Bauart ist.

   Bestimmen Sie dann $\sigma(f)$ für jedes $f \in A(\mathbb{T})$, und geben Sie an, ob $A(\mathbb{T})$ halbeinfach ist, dh. es gilt $x \neq 0 \Rightarrow r(x) > 0$. Zeigen Sie auch, dass wenn $f(\zeta) \neq 0$ für alle $\zeta \in \mathbb{T}$, f in $A(\mathbb{T})$ invertierbar ist.

Schließlich beschreibe man $M_{\ell_1(\mathbb{Z})}$!

Hinweis: Ist $m \in M_{A(\mathbb{T})}$, so betrachte die Abbildung $f(\zeta) = \zeta \in A(\mathbb{T})$ und setze $\eta := m(f)$. Zeige dann $m = m_\eta$.

Bemerkung: Dass aus $f(\zeta) \neq 0$ für alle $\zeta \in \mathbb{T}$ die Invertierbarkeit folgt, besagt insbesondere, dass mit f auch $\frac{1}{f}$ auch absolut summierbare Fourierkoeffizienten hat!

6. Sei A eine kommutative C^*-Algebra mit Eins und sei $a = a^* \in A$ sowie $t \in \mathbb{R}$. Zeigen sie, dass a positiv ist, falls $\|a - te\| \leq t$. Zeigen sie auch, dass $\|a - te\| \leq t$, falls a positiv ist und $\|a\| \leq t$ erfüllt.

7. Sei A eine C^*-Algebra mit Eins – im allgemeinen nicht kommutativ. Zeigen Sie, dass die Summe positiver Element wieder positiv ist.

8. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, und sei $C(X)$ die C^*-Algebra aller komplexwertigen, beschränkten und stetigen Funktionen darauf. Sei M der Gelfandraum dieser C^*-Algebra.

   Man zeige, dass $\iota : X \to M$ definiert durch $x \mapsto m_x$, wobei $m_x(f) = f(x),\ f \in C(X)$ eine stetige Abbildung ist, die dichtes Bild hat.

   Man beweise schließlich, dass ι surjektiv ist, falls X kompakt ist.

   Hinweis:

   Für die Stetigkeit verwende man die Charakterisierung der w^*-Topologie als Initiale Topologie bzgl. der Abbildungen $m \mapsto m(f),\ f \in C(X)$.

   Für die Dichtheit wende man das Lemma von Urysohn an auf die abgeschlossenen Teilmengen $\overline{\iota(X)}$ und $\{m\}$ von M, wobei m ein fiktiver Punkt aus $M \setminus \overline{\iota(X)}$ ist.