Übungen zu Fana2 WS11, 3. Übung

1. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt vollständig regulär, falls er $(T2)$ erfüllt und falls es zu jedem offenen $O \in \mathcal{T}$ und jedem $x \in O$ eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ gibt, sodass $f(x) = 1$ und $f(O^c) \subseteq \{0\}$.

   Man zeige, dass Teilräume versehen mit der Spurtopologie von vollständig regulären Räumen auch vollständig regulär sind.

   Man zeige weiters, dass, falls die Abbildung ι aus dem letzten Beispiel der 2ten Übung betarchtet als Abbildung von X auf $\iota(X)$, versehen mit der Spurtopologie als Teilmenge von M, ein Homöomorphismus ist, der Raum X dann vollständig regulär ist.

   Schließlich zeige man, dass, wenn X vollständig regulär ist, die Abbildung $\iota : X \to \iota(X)$ ein Homöomorphismus ist.

   Hinweis: Zu jeder $O \in \mathcal{T}$ und $x \in O$ betrachte man $\{m \in M : m(f) > \frac{1}{2}\} \cap \iota(X)$, wenn f wie in der Definition von 'vollständig regulär' ist. Wie liegt diese Menge, wenn man sie mit $\iota(O)$ und $\iota(x)$ vergleicht?

   Bemerkung: M bezeichnet man auch als Stone-Czech Kompaktifiziereung, wenn X vollständig regulär ist. Sie ist bis auf homöomorphe Kopien jene Kompakte 'Obermenge' βX von X, die X dicht enthält und sodass sich jede beschränkte und stetige Funktion auf X stetig nach βX fortsetzen lässt.

2. Sei Ω ein kompakter T2-Raum und $\Phi : C(\Omega) \to \mathfrak{C}(\ \subseteq \mathcal{B}(H))$ ein isometrischer C^*-Isomorphismus. Bezeichne mit $\mathcal{A}$ die σ-Algebra aller Borel Mengen in Ω. Weiters sei E das eindeutige reguläre Spektralmaß für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H \rangle$, sodass

   $$\Phi(\phi) = \int \phi \, dE, \ \phi \in C(\Omega) .$$

   Man zeige: Ist $\Delta \subseteq \Omega$ offen und nicht leer, so gilt $E(\Delta) \neq 0$.

   Hinweis: Ω is vollständig regulär!

3. Mit der Notation aus dem letzten Beispiel sei $\Delta \in \mathcal{A}$, und setze $G := E(\Delta)H = \operatorname{ran} E(\Delta)$. Sind $\phi_1, \phi_2 \in B(\Omega, \mathcal{A})$, so zeige man, dass $[\int \phi_1 dE]|_G = [\int \phi_2 dE]|_G$, wenn $\phi_1(t) = \phi_2(t), \ t \in \Delta$.

   Zeigen Sie, dass dabei $\sigma([\int \phi dE]|_G) \subseteq \overline{\phi(\Delta)}$.

   Zeigen Sie weiters, dass für offene und nichtleere Δ und $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$, sodass $\phi|_\Delta$ stetig ist, immer

   $$\phi(\Delta) \subseteq \sigma([\int \phi dE]|_G).$$

   Hinweis: Nehmen Sie an, dass $\phi(x) \in \rho([\int \phi dE]|_G)$ für ein $x \in \Delta$. Zeigen Sie, dass dann auch $\phi(y) \in \rho([\int \phi dE]|_G)$ für alle y aus einer kompakten Umgebung Δ' von x. Wie stehen $\rho([\int \phi dE]|_G)$ und $\rho([\int \phi dE]|_{G'})$ mit $G' := E(\Delta')H$ in Verbindung?

4. Sei $E : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ ein Spektralmaß für $\langle \Omega, \mathcal{A}, H \rangle$ und $\phi \in B(\Omega, \mathcal{A})$. Man zeige, dass $\lambda \in \sigma_p(\int \phi dE)$ (Punktspektrum) genau dann, wenn $E(\{t \in \Omega : \phi(t) = \lambda\}) \neq 0$. Dabei gilt $\operatorname{ran} E(\{t \in \Omega : \phi(t) = \lambda\}) = \ker(\lambda I - \int \phi dE)$.

Zeigen Sie weiters: Ist $T \in B(H)$ normal und ist E das zu T gehörige Spektralmaß, und liegt $\lambda \in \sigma(T)$ isoliert, dann folgt $\phi(\lambda) \in \sigma_p(\int \phi dE)$ für jedes beschränkte, messbare $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

5. Mit der Notation aus dem vorherigen Beispiel zeigen Sie, dass $\int \phi dE$ genau dann kompakt ist, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \Rightarrow \dim \operatorname{ran}\left(E(\{t \in \Omega : |\phi(t)| \geq \epsilon\})\right) < \infty.$$

   Was besagt diese Äquivalenz, wenn $\Omega = \mathbb{C}$ für einen normalen $T \in B(H)$ und wenn E das zu T gehörige Spektralmaß ist.

   Zeigen Sie damit, dass $(K^*K)^{1/2}$ kompakt ist, wenn K ein kompakter Operator auf H ist.

6. Geben sie ein Beispiel eines selbstadjungierten und daher auch normalen $T \in B(H)$ an, sodass H keine ONB bestehend aus Eigenvektoren von T hat. (Hinweis: Multiplikationsoperator auf einem $L^2(\mu)$ für ein geeignetes μ.)

   Zeigen Sie weiters, dass für jeden kompakten und normalen Operator $T \in B(H)$ es eine ONB von H bestehend aus Eigenvektoren gibt.

7. Sei $H = \ell^2(\mathbb{N})$ und $T : \mathfrak{D} \to \ell^2(\mathbb{N})$ mit $T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (n \cdot x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $\mathfrak{D} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) : (n \cdot x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})\}$. Zeigen Sie, dass T ein abgeschlossener Operator ist, dh. dass der Graph von T als Teilmenge von $H \times H$ abgeschlossen ist.

8. Sei A eine Banachalgebra und $B \subseteq A$ eine kommutative Unteralgebra. Man zeige, dass dann auch $\overline{B}$ kommutativ ist.

   Weiters sei H ein Hilbertraum und $\mathfrak{A}$ eine kommutative Unteralgebra von $B(H)$. Zeigen sie, dass der Abschluss $\overline{\mathfrak{A}}^w$ in $B(H)$ bezüglich der schwachen Operatortopologie eine kommutative Banachalgebra ist.

   Die schwache Operatortopologie ist die von den Funktionalen $A \mapsto (Ax, y)$ von $B(H)$ erzeugten initiale Topologie. Insbesondere ist $A \in \overline{\mathfrak{A}}^w$ genau dann, wenn es ein Netz $(A_i)_{i\in I}$ gibt, sodass $(A_i x, y) \to (Ax, y)$ für alle $x, y \in H$.

   Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass für $A \in \mathfrak{A}, B \in \overline{\mathfrak{A}}^w$, gilt, dass $AB = BA \in \overline{\mathfrak{A}}^w$!