Übungen zu Fana2 WS11, 4. Übung

1. Es sei T ein beschränkter normaler Operator und B_i, $i \in I$ eine irreduzible Familie beschränkter Operatoren auf H, (d.h. gilt für einen abg. Teilraum L von H, dass $B_i(L) \subset L\ \forall i \in I$, so folgt $L = H$ oder $L = \{0\}$). Wenn T und T^* mit allen $B_i,\ i \in I$ kommutiert, so gilt $T = \lambda I$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ (Lemma von Schur).

   Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass wenn $E(\Delta)$ immer entweder $= I$ oder $= 0$ ist, dann das Spektrum von T einpunktig sein muss, wenn E das zu T gehörige Spektralmaß auf $\sigma(T)$ bezeichnet!

2. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine analytische Funktion mit Konvergenzradius ≥ 1. Zeigen Sie, dass als Elemente von $[0, +\infty]$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = \lim_{r \nearrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2\, dt = \sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2\, dt\,.$$

   Zeigen Sie weiters, dass $f \in H_2(\mathbb{D})$ genau dann, wenn $\sup_{0\leq r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2\, dt < +\infty$. In dem Fall gilt $(f, g)_{H_2} = \lim_{r\nearrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) \cdot \overline{g(re^{it})}\, dt$

   Hinweis: Für festes r gilt $|f(re^{it})|^2 = \lim_{N\to\infty} (\sum_{n=0}^{N} a_n r^n e^{int}) \overline{(\sum_{m=0}^{N} a_m r^m e^{imt})}$ gleichmäßig in t.

3. Sei $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ eine analytische Funktion mit Konvergenzradius ≥ 1, sodass $\sup_{z\in\mathbb{D}} |h(z)| < +\infty$ – man schreibt $h \in H_\infty(\mathbb{D})$. Zeigen Sie, dass durch $T_h : H_2(\mathbb{D}) \to H_2(\mathbb{D}),\ f \mapsto hf$ eine lineare und beschränkte Abbildung wohldefiniert ist, wobei $\|T_h\| \leq \|h\|_\infty := \sup_{z\in\mathbb{D}} |h(z)|$.

   Anmerkung: Sie dürfen verwenden, dass das Produkt zweier um Null analytischer Funktionen mit Konvergenzradius jeweils ≥ 1 wieder eine analytische Funktion mit Konvergenzradius ≥ 1 ist!

4. Sei H ein RKHR auf Ω und sei $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass die lineare Relation $T_\phi = \{(f; \phi f) : f, \phi f \in H\}$ in $H \times H$ abgeschlossen ist. Bestimmen Sie $\operatorname{mul} T_\phi$.

   Zeigen Sie weiters, dass im Falle $\Omega = \mathbb{D}$ und $H = H_2(\mathbb{D})$ der Definitionsbereich $\operatorname{dom} T_\phi$ $\mathbb{C}[z]$ enthält, wenn man $\phi \in H_2(\mathbb{D})$ voraussetzt. Ist $\mathbb{C}[z]$ dicht in $H_2(\mathbb{D})$? Warum?

   Anmerkung: $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt Multiplierer von H, falls T_ϕ ein beschränkter, überall definierter Operator ist. Im Falle $\Omega = \mathbb{D}$ und $H = H_2$ sind gemäß dem vorherigen Beispiel alle $\phi \in H_\infty(\mathbb{D})$ solche Multiplierer.

5. Zeigen Sie, dass jeder Multiplierer ϕ von $H_2(\mathbb{D})$ schon in $H_\infty(\mathbb{D})$ liegen muss, wobei $\|T_\phi\| = \|\phi\|_\infty$.

   Hinweis: Zeigen Sie, dass $(T_\phi)^* k_w = \overline{\phi(w)} k_w,\ w \in \mathbb{D}$.

6. Sei G eine Gruppe. Eine Abbildung $f : G \to \mathbb{C}$ heißt positiv definit, falls $K : G \times G \to \mathbb{C},\ K(s,t) = f(st^{-1})$ eine Kernfunktion ist, also (3.1) und (3.2) aus dem

Skriptum erfüllt. Sei H der zu K gehörige RKHR! Zeigen Sie zunächst, dass die g aus H alle beschränkte Funktionen sind.

Bezeichne $k_t \in H$ jenes Element aus H, sodass $g(t) = (g, k_t), g \in H$, so zeige man, dass $k_e(x) = f(x),\ x \in G$, wobei e das neutrale Element von G ist. Bestimmen Sie in Analogie auch $k_t(x)$ für beliebiges $t \in G$.

Schließlich zeige man, dass durch $U_t : \operatorname{span}\{k_s : s \in G\} \to \operatorname{span}\{k_s : s \in G\},\ \sum \lambda_s k_s \mapsto \sum \lambda_s k_{s\cdot t}$ eine lineare und isometrische Abbildung wohldefiniert (!!!) ist, die sich zu einer unitären Abbildung – auch U_t genannt –fortsetzen lässt. Berechnen Sie $(U_t g)(x)$ für $g \in H, t, x \in G$.

7. Sei $H = L^2([0,1], \lambda)$ und

$$\begin{aligned} T = \{(f; g) : f \in C^1[0,1],\ f' \in AC[0,1], \\ f, f', g \in L^2([0,1], \lambda),\ f'' = g\ (\lambda - \text{fast überall})\}. \end{aligned}$$

Man zeige, dass T eine abgeschlossene lineare Relation in H^2 ist. Weiters bestimme man $\operatorname{mul} T, \ker T, \operatorname{dom} T, \operatorname{ran} T$.

Hinweis für die Abgeschlossenheit: Zeigen Sie zunächst, dass

$$\begin{aligned} T_0 = \{(f; g) : f \in C^1[0,1],\ f' \in AC[0,1], \\ f, f', g \in L^2([0,1], \lambda),\ f'' = g\ (\lambda - \text{fast überall}),\ f(0) = f'(0) = 0\}. \end{aligned}$$

abgeschlossen ist, indem Sie T_0 explizit bestimmen. Vergleichen Sie T und T_0 als Teilräume von $H \times H$!

Werfen Sei auch einen Blick auf Korollar 16.6.4 und auf die darauffolgende Bemerkung in meinem Analysis 3 Skriptum.

8. Ist $T \subseteq H^2$ ein linearer Operator, dh. $\operatorname{mul} T = \{0\}$, so heißt T abschließbar, wenn auch $\operatorname{mul} \overline{T} = \{0\}$. Zeigen Sie, dass

$$T = \{(f; g) \in L^2[0,1] \times L^2[0,1] : f \in C^1[0,1], g(x) = f'(0) + \int_0^x f(t)\, dt\}$$

nicht abschließbar ist.