Übungen zu Fana2 WS11, 5. Übung

1. Seien X, Y Banachräume und sei $T \leq X \times Y$ eine abgeschlossene lineare Relation. Weiters sei angenommen, dass es zu jedem abgeschlossenen linearen Teilraum R von T ein Komplement gibt, dh. einen abgeschlossenen linearen Teilraum Q von T, sodass $T = Q \dot{\boxplus} R$ (direkte Summe).

   Zeige Sie zunächst, dass das immer der Fall ist, wenn X und Y Hilberträume sind.

   Zeigen Sie weiters, dass es unter der eingangs gemachten Voraussetzung an T einen abgeschlossenen linearen Operator $T_s : \operatorname{dom} T \to Y$ gibt, sodass

   $$T = \{(x; y + T_s(x)) : x \in \operatorname{dom} T_s,\ y \in \operatorname{mul}(T)\}$$

2. Seien H_1, H_2 Hilberträume und $R, T \leq H_1 \times H_2$ lineare Relationen.

   Zeigen Sie zunächst, dass $(T \boxplus R)^* = T^* \cap R^*$!

   Zeigen Sie weiters, dass für abgeschlossenes T immer $\operatorname{dom} T$ genau dann abgeschlossen ist, wenn $\operatorname{dom} T^*$ es ist!

3. Sei A eine selbstadjungierte Relation in $H \times H$. Man zeige, dass dann $H = H_1 \oplus H_2$ für abgeschlossene Unterräume $H_1, H_2 = H_1^\perp$ von H und $A = A_1 \oplus A_2$ (direkte und orthogonale Summe bzgl. dem Summenskalarprodukt auf $H \times H$), wobei $A_1 \subseteq H_1 \times H_1$ betrachtet als Relation zwischen H_1 und H_1 ein selbstadjungierter Operator mit dichten Definitionsbereich ist, und wobei $A_2 = \{0\} \times H_2$.

   Man zeige auch, dass eine symmetrische Relation $S \subseteq H \times H$ mit $\operatorname{dom} S = H$ automatisch ein selbstadjungierter und beschränkter Operator auf H ist.

4. Seien H_1, H_2 Hilberträume und $T \subseteq H_1 \times H_2$ eine lineare Relation mit Adjungierter $T^* \subseteq H_2 \times H_1$. Seien $\tilde{H}_1, \tilde{H}_2$ zwei weitere Hilberträume mit $H_j \subseteq \tilde{H}_j,\ j = 1, 2$. Man bestimme die Adjungierte von T betrachtet als lineare Relation in $\tilde{H}_1 \times \tilde{H}_2$, dh. $T^* \subseteq \tilde{H}_2 \times \tilde{H}_1$.

   Man bestimme weiters T^* wieder in $\tilde{H}_2 \times \tilde{H}_1$, wenn $T = H_1 \times H_2$, $T = \{0\} \times H_2$, $T = H_1 \times \{0\}$ bzw. $T = U$, wenn $U : H_1 \to H_2$ unitär ist.

5. Sei H ein Hilbertraum, $S \subseteq H \times H$ eine symmetrische und abgeschlossene Relation. Man zeige, dass (von Neumannsche Formel)

   $$S^* = S \dot{\boxplus} \{(f; if) : f \in ker(S^* - i)\} \dot{\boxplus} \{(f; -if) : f \in ker(S^* + i)\}.$$

   Hinweis: Man bestimme die Adjungierte der Cayley Transformierten von S unter zu Hilfe Nahme des vorherigen Beispiels und transformiere diese wieder zurück.

6. Zeigen Sie, dass für lineare Relationen $R, T, Q \subseteq H_1 \times H_2$ und $S \subseteq H_2 \times H_3$ mit Hilberträumen H_1, H_2, H_3 gilt, dass $R^* S^* \subseteq (SR)^*$. Geben Sie ein Beispiel für R und S an, wo hier keine Gleichheit steht.

   Zeigen Sie weiters, dass immer $(R + T) + Q = R + (T + Q)$, und geben Sie auch ein Beispiel für lineare Relationen an, für die $(R + T) - T \neq R$.

7. Sei H ein RKHR auf Ω und sei $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Funktion, und sei $T_\phi = \{(f;\phi f) : f, \phi f \in H\}$ in $H \times H$. Weiters seien für $w \in \Omega$ die $k_w \in H$ so, dass $(f, k_w) = f(w)$ für alle $f \in H$.

   Zeigen Sie, dass
$$T_\phi^* = \mathrm{cls}\{\left(k_w; \overline{\phi(w)}\, k_w\right) : w \in \Omega\}\,,$$
   wobei cls für die abgeschlossene lineare Hülle steht.

8. Mit der Notation aus dem letzten Beispiel zeige man, dass ϕ genau dann Multiplierer mit $\|T_\phi\| \leq 1$ ist, wenn
$$R(s,t) = \left(1 - \phi(s)\overline{\phi(t)}\right)K(s,t),\ \ s,t \in \Omega$$
   die Bedingungen (3.2) aus dem Skriptum erfüllt. $K(s,t)$ ist dabei der zu H gehörige Kern.

   Hinweis für die Hinrichting: $\|S\| \leq 1 \Leftrightarrow (I - SS^*) \geq 0$.

   Hinweis für die Rückrichting: Zeigen Sie zunächst für eine lineare Relation R mit $\|y\| \leq \|x\|$ für alle $(x;y) \in R$, dass $\overline{R}$ der Graph einer Kontraktion mit abgeschlossenen $\mathrm{dom}\, R$ ist, und wenden Sie das auf eine geeignete Relation an!

9. Sei $H = L^2([0,1],\lambda)$ und T_{00}, T, A die Operatoren
$$T = \{(f;g) : f \in C^1[0,1],\ f' \in AC[0,1],\\ f, f', g \in L^2([0,1],\lambda),\ f'' = g\ (\lambda - \text{fast überall})\}.$$
$$T_{00} = \{(f;g) : f \in C^1[0,1],\ f' \in AC[0,1],\\ f, f', g \in L^2([0,1],\lambda),\ f'' = g\ (\lambda\text{–fast überall}),\ f(0) = f'(0) = 0 = f(1) = f'(1)\}.$$
$$A = \{(f;g) : f \in C^1[0,1],\ f' \in AC[0,1],\\ f, f', g \in L^2([0,1],\lambda),\ f'' = g\ (\lambda - \text{fast überall}),\ f(0) = 0 = f(1)\}.$$
   Zeigen Sie, dass T_{00} symmetrisch, dass $T_{00} = T^*, T^* = T_{00}$, und dass A selbstadjungiert ist.

   Hinweis: Berechnen Sie die Adjungierte von $f \mapsto \int_0^x \int_0^t f(s)\, dsdt$ als Abbildung von $L^2([0,1])$ nach $L^2([0,1])$. Partielle Integration!