Übungen zu Fana2 WS11, 6. Übung

1. Mit der Notation aus dem letzten Beispiel der fünften Übung gebe man die Defekt Indizes von T_{00} an. Weiters berechne man $\sigma(A)$ (insbesondere: ist $\infty \in \sigma(A)$?), sowie die Resolvente $(A-\lambda)^{-1},\ \lambda \in \rho(A)$ des Operators A.

   Hinweis: Lösen Sie mit der Meth. d. Variation der Konstanten die DG $-f''-\lambda f = g, \quad g \in C([0,1])$ unter den Randbedingungen $f(0) = f(1) = 0$. Stellen Sie die Lösung als Integral dar. Zeigen Sie, dass dieses Integral dann auch die Lösung von $(A-\lambda)f = g$ für beliebige $g \in L^2[0,1]$ ist.

2. Sei H ein Hilbertraum, $S \subseteq H \times H$ eine symmetrische und abgeschlossene Relation. Man zeige, dass im Falle von endlichen Defekt Indizes (n_+, n_-) immer $\operatorname{codim}_S S^* = n_+ + n_-$, wobei $\operatorname{codim}_S S^* = \dim S^*/S$.

   Wie groß ist dann $\operatorname{codim}_S A$, wenn $n_+ = n_-$ und A eine selbstadjungierte Erweiterung von S in $H \times H$ ist?

3. Sei H ein Hilbertraum, $S \subseteq H \times H$ eine symmetrische Relation. Zeigen Sie, dass dann auch $S \boxplus (\{0\} \times (\operatorname{dom} S)^{\perp})$ eine symmetrische Relation ist.

   Zeigen Sie weiters, dass wenn zusätzlich S abgeschlossen und ein Operator ist, der Defekt Indizes $(1,1)$ hat, es immer genau eine selbstadjungierte Erweiterung A_0 in $H \times H$ gibt mit $\operatorname{mul} A_0 \neq \{0\}$. Alle anderen selbstadjungierten Erweiterungen sind Operatoren.

4. Sei μ ein nicht negatives Borelmaß auf $\mathbb{R}$ mit $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|t|+1}\, d\mu(t) < +\infty$. Betrachte auf $H = L^2(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \mu, \mathbb{C})$ die lineare Relation $M_t := \{(f;g) \in H \times H : tf(t) = g(t)\ \mu - \text{f.ü.}\}$. Zeigen Sie, dass M_t ein selbstadjungierter Operator ist.

   Weiters zeige man, dass alle $f \in \operatorname{dom} M_t$ integrierbar bzgl. μ sind. Schließlich sei $S \leq H \times H$ die Relation $\{(f;g) \in M_t : \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu = 0\}$. Zeigen Sie, dass S symmetrisch mit Defect $(1,1)$ ist, und dass für $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ der Raum $\operatorname{ran}(S-\overline{z})^{\perp}$ von $(t \mapsto \frac{1}{t-z})$ aufgespannt wird. Was muss μ erfüllen, damit S nicht dicht definiert ist?

   Hinweis: Für $M_t^* = M_t$ betrachten Sie $((M_t - z)^{-1})^*$!

5. Sei $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ eine Folge von reellen Zahlen, sodass für jedes $N \in \mathbb{N}$ und $\alpha_0, \dots, \alpha_N \in \mathbb{C}$
$$\sum_{i,j=0}^{N} \alpha_i \overline{\alpha_j}\, \eta_{i+j} \geq 0.$$
   Betrachte den Raum aller Polynome $\mathbb{C}[z]$ versehen mit dem Skalarprodukt
$$\langle \sum_{i=0}^{N} a_i z^i, \sum_{j=0}^{N} b_j z^j \rangle := a_i \overline{b_j}\, \eta_{i+j}.$$
   Man zeige, dass $N := \{p(z) \in \mathbb{C}[z] : \langle p, p \rangle = 0\}$ ein linearer Unterraum von $\mathbb{C}[z]$ ist, und dass $(\mathbb{C}[z]/N, \langle .,. \rangle)$, wobei $\langle p+N, q+N \rangle = \langle p, q \rangle$, ein Prähilbertraum ist. Mit H werde die Vervollständigung davon bezeichnet.

Nun sei $S \subseteq H \times H$ definiert als

$$S := \{(p(z) + N; zp(z) + N) \in H \times H : p \in \mathbb{C}[z]\}.$$

Man zeige, dass S eine symmetrische lineare Relation ist, wobei der Abschluss von S und damit auch S Defekt Indizes $(0, 0)$ oder $(1, 1)$ hat.

Hinweis: Bestimme zunächst $\operatorname{ran}(S - \lambda)$ für $\lambda \in \mathbb{C}^{\pm}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}[z]$. Um die Gleichheit von $\dim(\operatorname{ran}(S - \lambda))^{\perp}$ und $\dim(\operatorname{ran}(S - \overline{\lambda}))^{\perp}$ zu zeigen, betrachte man die konjugiert lineare Abbildung $p \mapsto \overline{p}$ von $\mathbb{C}[z]/N$ nach $\mathbb{C}[z]/N$ bzw. ihre stetige Fortsetzung auf H.

6. Ist μ ein nichtnegatives endliches Borelmaß auf $\mathbb{R}$, sodass alle Polynome $p(t)$ über $\mathbb{R}$ nach μ integrierbar sind, so nennt man die Zahlen $\eta_n = \int t^n \, d\mu$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ die Momente des Maßes μ. Man zeige, dass diese Momente immer die Positivitätsbedingung aus dem vorherigen Beispiel erfüllen.

   Man zeige auch umgekehrt, dass es zu Zahlen $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, die diese Positivitätsbedingung erfüllen, immer ein nichtnegatives endliches Borelmaß auf $\mathbb{R}$ gibt, sodass diese Zahlen genau die Momente dieses Maßes sind (Hamburgersches Momentenproblem).

   Hinweis: Betrachte eine selbstadjungierte Erweiterung von dem S aus dem letzten Beispiel.

7. Sei H ein RKHR auf einer Menge Ω mit Kernfunktion K. Ω sei versehen mit einer Topologie! Zeigen Sie:

   Falls $t \mapsto K(t, s)$ für jedes feste $s \in \Omega$ eine stetige Abbildung von Ω nach $\mathbb{C}$ und falls $t \mapsto K(t, t)$ eine lokal beschränkte Abbildung ist (zu jedem $x \in \Omega$ gibt es eine Umgebung U von x und ein $C_U \geq 0$, sodass $K(t, t) \leq C_U$ für alle $t \in U$), so sind alle $f \in H$ stetig.

   Zeigen Sie, dass unter der Annahme, dass die Topologie auf Ω lokalkompakt ist, auch die Umkehrung gilt!

8. Mit der Notation aus Beispiel 6 der 4ten Übung zeige man, dass alle Funktionen $g \in H$ stetig sind, falls f stetig ist. Dabei sei G eine topologische Gruppe – also G mit einer Topologie versehen, dass $s \mapsto s^{-1}$, $G \to G$, und $(s; t) \mapsto st$, $G \times G \to G$ stetig sind.

   Weiters zeige man, dass in diesem Fall auch die Funktion $t \mapsto U_t$ von G nach $B(H)$ stark stetig ist; dh. $t \mapsto U_t g$ ist stetig für alle $g \in H$.

   Hinweis: Betrachten Sie zuerst $\|U_t k_s - U_r k_s\|^2$ für $t \to r$ in G und festes $s \in G$; dann $\|U_t g - U_r g\|^2$, wobei g eine Linearkombination von k_s ist, und schließlich $\|U_t g - U_r g\|^2$ für $g \in H$.

9. Für einen unbeschränkten selbstadjungierten Operatoren A zeige man, dass $(e^{itA})_{t \in \mathbb{R}}$ eine Gruppe von unitären Operatoren bilden.

   Weiters zeige man mit Hilfe des Funktionalkalküls, dass $\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(e^{itA} g - g) = iAg$ für alle $g \in \operatorname{dom}(A)$.

   Hinweis: Es gilt $\frac{e^{its} - 1}{t} = i \int_0^s e^{it\tau} \, d\tau$.