# Übungen zu Fana2 WS11/12, 7. Übung

1. Auf dem Banachraum $C([0,1])$ sei die Kontraktionshalbgruppe $\{T(t)\}$ durch $(T(t)f)(s) = f(\min(1, t+s))$ gegeben. Man bestimme den infinitesimalen Erzeuger von $T$.

   Weisen wirklich nach, dass der bestimmte Operator $B$ tatsächlich der infinitesimalen Erzeuger $A$ von $T$ ist!

   Hinweis: Dazu reicht es, sich von $A \subseteq B$ bzw. $B \subseteq A$ und $\lambda \in \rho(B)$ für hinreichend großes $\lambda > 0$ zu überzeugen! (Warum?)

2. Zeigen Sie, dass auf $L^1(\mathbb{R})$ mit

$$T(t)f(s) = \begin{cases} 2f(t+s) & s \in [-t, 0] \\ f(t+s) & \text{sonst} \end{cases}$$

   eine stark stetige Halbgruppe gegeben ist, für die die Abschätzung $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ nur für $M \geq 2$ gilt.

3. Zeigen Sie, dass eine Halbgruppe $(T(t))_{t \in [0,+\infty)}$ von Operatoren in $X$ genau dann stark stetig ist, wenn gilt:

   $\exists M > 0, \delta > 0$ und ein dichter Teilraum $E$ von $X$ mit $\|T(t)\| \leq M \quad \forall t \in [0, \delta]$, $\lim_{t \to 0} \|T(t)x - x\| = 0 \quad \forall x \in E$.

   Verwenden Sie diese Tatsache, um zu zeigen, dass für $p \in [1, +\infty)$ die Translationshalbgruppe $(T(t)f)(s) = f(s+t)$ für $f(s) \in L^p(\mathbb{R})$ eine stark stetige Halbgruppe ist.

4. Sei $H = L^2(\mathbb{R})$ und $A$ der Multiplikationsoperator mit $it$, dh. $f \mapsto itf(t)$ mit $\operatorname{dom} A = \{f \in H : itf(t) \in H\}$. Von welcher Halbgruppe ist $A$ der infinitesimalen Erzeuger.

5. Man betrachte $L^2[0, +\infty)$ und die Operatoren $(T(t)f)(s) := f(t+s)$ darauf. Bestimmen Sie den infinitesimalen Erzeuger von $T$ und zeigen Sie, dass $S := (iT)^*$ symmetrisch ist. Man bestimme weiters die Defekt Indizes von $S$.

6. Es sei $A$ infinitesimaler Erzeuger einer $C_0$–Halbgruppe $\{T(t)\}$ auf einem Hilbertraum. Man zeige, dass $\{(T(t))^*\}$ eine $C_0$–Halbgruppe mit infinitesimalem Erzeuger $A^*$ ist.

   Hinweis: Starten Sie mit $A^*$ und der davon erzeugten Halbgruppe! Warum existiert diese? Verwenden Sie den Satz von Hille-Yoshida!

7. Zeigen Sie direkt (dh. ohne Hilfe von Korollar 5.4.6), dass für einen Hilbertraum $H$ und eine stark stetige Halbgruppe bestehend aus isometrischen Operatoren $i$ mal ihr infinitesimaler Generator $A$ immer symmetrisch ist. Weiters zeige man, dass $i$ mal der Generator sogar selbstadjungiert ist, falls Operatoren in der Halbgruppe unitär sind.

   Hinweis: Zeigen Sie, dass $(y, x) + (x, y) = 0$ falls $(x; y) \in A$!

8. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetige und positiv definite Funktion. Zeigen Sie den Satz von Bochner, dh. , dass es zu $f$ ein endliches, nichtnegatives Maß $\mu$ auf $\mathbb{R}$ gibt, sodass

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \exp(itx)\, d\mu(t) \,.$$

Hinweis: Betrachten Sie von $f$ erzeugten RKHR und darauf die Operatoren $U_t$ wie im Beispiel 6 der 4ten Übung. Zeigen Sie, dass $(U_t)_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe bestehend aus unitären Operatoren ist, und betrachten Sie $i$ mal ihren infinitesimalen Generator! Siehe auch das letzte Beispiel der 6ten Übung!