2.Übung (31.10.2013)

10. Seien X, Y Banachräume und $u : X \to Y$ beschränkt und linear. Angenommen es gibt einen abgeschlossenen Teilraum Z von Y, sodass $Y = u(X) \dot{+} Z$, so zeige man, dass $u(X)$ abgeschlossen ist, und dass es eine beschränkte lineare Projektion $p : Y \to Y$ gibt, dh. $pp = p$, die $u(X)$ als Bild hat.

    Zeige weiters, dass für lineare und beschränkte $u : X \to Y$ mit $\operatorname{codim}_Y u(X) < +\infty$ das Bild $u(X)$ immer abgeschlossen ist.

    Hinweis. Betrachte die Abbildung $(X/\ker u) \times Z \to Y,\ (x + \ker u, z) \mapsto u(x) + z$.

11. Seien X, Y Banachräume. Eine lineare und beschränkte Abbildung $u : X \to Y$ heißt Fredholmsch, wenn u einen endlichdimensionalen Kern und einen Bildbereich mit endlicher Kodimension hat.

    Man zeige, dass alle Fredholmschen $u : X \to Y$ eine Quasiinverse $v : Y \to X$ im folgenden Sinn haben: v ist linear, beschränkt und Fredholmsch derart, dass sowohl $I_Y - uv$ als auch $I_X - vu$ sind endlichdimensionale Operatoren, dh. haben einen Kern mit endlicher Kodimension, oder äquivalent dazu, haben einen Bildbereich mit endlicher Dimension. I_X bzw. I_Y stehen für die Identitäten auf X bzw. Y.

    Bemerkung. Aus der Funktionalanalysis ist bekannt, dass alle Operatoren der Form $\lambda I + K : X \to X$ mit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und kompakten $K : X \to X$ Fredholmsch sind.

12. Sei X ein Banachraum und bezeichne $\mathcal{K}(X)$ den Raum aller kompakten Operatoren $K : X \to X$.

    Zeige, dass $\mathcal{K}(X)$ ein abgeschlossenes Ideal der Banachalgebra $B(X)$ ist.

    Für ein $u \in B(X)$ definiert man $\sigma_{ess}(u)$ als das Spektrum $\sigma(u + \mathcal{K}(X))$ von $u + \mathcal{K}(X)$ in der Banach-Algebra $B(X)/\mathcal{K}(X)$.

    Man zeige, dass $\sigma_{ess}(u) \subseteq \sigma(u)$, und dass folgende Aussagen äquivalent sind

    - $\lambda \notin \sigma_{ess}(u)$.
    - Für geeignete $v \in B(X)$ und $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(X)$ gilt $(\lambda I - u)v = I + K_1$. und $v(\lambda I - u) = I + K_2$.
    - $(\lambda I - u)$ ist Fredholmsch.

13. Betrachte die Abbildung $f \mapsto \bar{f}$ auf $A(\mathbb{T})$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (\bar{a}_{-n})_{n\in\mathbb{Z}}$ auf $\ell_1(\mathbb{Z})$. Man zeige, dass dann $\theta((\bar{a}_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = \overline{\theta((a_n)_{n\in\mathbb{Z}})}$ und dass $A(\mathbb{T})$ und $\ell_1(\mathbb{Z})$ mit dieser Abbildung beide Banach-$*$-Algebren aber keine C^*-Algebren sind.

14. Sei $C^1[0,1]$ die Menge aller stetig differenzierbaren, komplexwertigen Funktionen auf $[0,1]$ versehen mit

    $$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty,$$

    und mit der punktweisen Multiplikation. Man zeige, dass $C^1[0,1]$ eine kommutative Banachalgebra mit Eins ist. Weiters betrachte man das Element $g \in C^1[0,1]$ definiert durch $g(t) = t$, und bestimme man $\|g\|$ sowie $r(g)$. Kann $C^1[0,1]$ mit einer Involution $.^*$ zu einer C^*-Algebra gemacht werden?

15. Sei A eine Banachalgebra A' der Dualraum und A'' der Bidualraum von A. Wir definieren Abbildungen ($x, y \in A$, $x' \in A'$, $x'', y'' \in A''$ $\langle x', x\rangle = x'(x)$ etc.):

    (i) Rechtsmultiplikation eines Elementes aus A' mit einem Element aus A:

    $$A' \to A' \quad x' \mapsto x'x : \quad \langle x'x, y\rangle = \langle x', xy\rangle$$

    (ii) Linksmultiplikation eines Elementes aus A' mit einem Element aus A'':

    $$A' \to A' \quad x' \mapsto x''x' : \quad \langle x''x', x\rangle = \langle x'', x'y\rangle$$

    (iii) Erstes Arensprodukt zweier Elemente aus A'':

    $$A'' \times A'' \to A'' \quad y'' \mapsto y''x' : \quad \langle y''x'', x'\rangle = \langle y'', x''x'\rangle$$

Man zeige:

- Die so erklärten Abbildungen sind stetig.
- Es gilt $x'(xy) = (x'x)y$ und $(x''x')x = x''(x'x)$ (d.h. A' ist ein rechter Banach A-Modul und ein linker Banach A''-Modul).
- Es gilt $(x''y'')x' = x''(y''x')$, d.h. das Arensprodukt ist assoziativ.
- A'' ist unter der Arensmultiplikation eine Banachalgebra, in der die Banachalgebra A vermöge der kanonischen Inklusion
$$\iota : A \to A'',\ \langle \iota(x), x' \rangle = \langle x', x \rangle$$
isometrisch eingebettet ist.

16. Zeige, dass für jedes $\eta \in \mathbb{T}$ die Abbildung $m_\eta : A(\mathbb{T}) \to \mathbb{C},\ f \mapsto f(\eta)$ ein multiplikatives lineares Funktional ist. Umgekehrt, jedes multiplikative lineare Funktional auf $A(\mathbb{T})$ ist von dieser Gestalt.

    Bestimme $\sigma(f)$ für jedes $f \in A(\mathbb{T})$, und gib an, ob $A(\mathbb{T})$ halbeinfach ist (d.h. ob stets $x \neq 0 \Rightarrow r(x) > 0$ gilt). Zeige auch, dass wenn $f(\zeta) \neq 0$ für alle $\zeta \in \mathbb{T}$, f in $A(\mathbb{T})$ invertierbar ist.

    Schließlich beschreibe man $M_{\ell_1(\mathbb{Z})}$!

    Hinweis. Ist $m \in M_{A(\mathbb{T})}$, so betrachte die Abbildung $f(\zeta) = \zeta \in A(\mathbb{T})$ und setze $\eta := m(f)$. Zeige dann $m = m_\eta$.

    Bemerkung. Dass aus $f(\zeta) \neq 0$ für alle $\zeta \in \mathbb{T}$ die Invertierbarkeit folgt, besagt insbesondere, dass mit f auch $\frac{1}{f}$ auch absolut summierbare Fourierkoeffizienten hat!

17. Man betrachte $\ell_1(\mathbb{N}_0)$ als Teilraum von $\ell_1(\mathbb{Z})$, indem man $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $(\tilde{a}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ identifiziert, wobei $a_n = \tilde{a}_n,\ n \in \mathbb{N}_0$ und $\tilde{a}_n = 0$ für $n \in -\mathbb{N}$.

    Man zeige, dass mit der Faltung $*$ eingeschränkt auf $\ell_1(\mathbb{N}_0) \times \ell_1(\mathbb{N}_0)$ eben dieser Raum $\ell_1(\mathbb{N}_0)$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $\ell_1(\mathbb{Z})$ ist.

    Weiters zeige man, dass für jedes $z \in \mathbb{C},\ |z| \leq 1$ das Funktional $m_z : \ell_1(\mathbb{N}_0) \to \mathbb{C}$ definiert durch $m_z((b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}) := \sum_{n=0}^\infty b_n z^n$ in $M_{\ell_1(\mathbb{N}_0)}$ liegt.

    Weiters zeige man, dass sich jedes $m \in M_{\ell_1(\mathbb{N}_0)}$ als $m_z = m$ für ein $|z| \leq 1$ darstellen lässt.

    Hinweis. Ist $m \in M_{\ell_1(\mathbb{N}\cup\{0\})}$, so betrachte man $z := m((0,1,0,\dots))$, zeige $z^k = m((0,0,\dots,1,0,\dots))$ mit 1 an der k-ten Stelle, und schließlich $m = m_z$.

    Bemerkung. Dieses und das letzte Beispiel zeigen, dass sich im Gegensatz zu beschränkten linearen Funktionalen multiplikative lineare Funktionale nicht von abgeschlossenen Teilalgebren auf die ganze Algebra fortsetzen lassen.

18. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, und sei $C(X)$ die C^*-Algebra aller komplexwertigen, beschränkten und stetigen Funktionen darauf. Sei M der Gelfandraum dieser C^*-Algebra.

    Man zeige, dass $\iota : X \to M$ definiert durch $x \mapsto m_x$, wobei $m_x(f) = f(x),\ f \in C(X)$ eine stetige Abbildung ist, die dichtes Bild hat.

    Man beweise schließlich, dass ι surjektiv ist, falls X kompakt ist.

    Hinweis. Für die Stetigkeit verwende man die Charakterisierung der w^*-Topologie als Initiale Topologie bzgl. der Abbildungen $m \mapsto m(f),\ f \in C(X)$. Für die Dichtheit wende man das Lemma von Urysohn an auf die abgeschlossenen Teilmengen $\overline{\iota(X)}$ und $\{m\}$ von M, wobei m ein fiktiver Punkt aus $M \setminus \overline{\iota(X)}$ ist.

19. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt vollständig regulär, falls er $(T2)$ erfüllt und falls es zu jedem offenen $O \in \mathcal{T}$ und jedem $x \in O$ eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ gibt, sodass $f(x) = 1$ und $f(O^c) \subseteq \{0\}$.

    Man zeige, dass Teilräume versehen mit der Spurtopologie von vollständig regulären Räumen auch vollständig regulär sind.

    Man zeige weiters, dass, falls die Abbildung ι aus dem vorigen Beispiel betrachtet als Abbildung von X auf $\iota(X)$, versehen mit der Spurtopologie als Teilmenge von M, ein Homöomorphismus ist, der Raum X dann vollständig regulär ist.

    Schließlich zeige man, dass, wenn X vollständig regulär ist, die Abbildung $\iota : X \to \iota(X)$ ein Homöomorphismus ist.

Hinweis. Zu jeder $O \in \mathcal{T}$ und $x \in O$ betrachte man $\{m \in M : m(f) > \frac{1}{2}\} \cap \iota(X)$, wenn f wie in der Definition von 'vollständig regulär' ist. Wie liegt diese Menge, wenn man sie mit $\iota(O)$ und $\iota(x)$ vergleicht?

Bemerkung. M bezeichnet man auch als Stone-Czech Kompaktifiziereung, wenn X vollständig regulär ist. Sie ist bis auf homöomorphe Kopien jene Kompakte 'Obermenge' βX von X, die X dicht enthält und sodass sich jede beschränkte und stetige Funktion auf X stetig nach βX fortsetzen lässt.