3.Übung (21.11.2012)

20. Ist $T \subseteq H^2$ ein linearer Operator, d.h. $\operatorname{mul} T = \{0\}$, so heißt T abschließbar, wenn auch $\operatorname{mul} \overline{T} = \{0\}$. Zeige, dass
$$T = \{(f;g) \in L^2[0,1] \times L^2[0,1] : f \in C^1[0,1], g(x) = f'(0) + \int_0^x f(t)\ dt\}$$
nicht abschließbar ist.

21. Seien X, Y Banachräume und sei $T \leq X \times Y$ eine abgeschlossene lineare Relation. Weiters sei angenommen, dass es zu jedem abgeschlossenen linearen Teilraum R von T ein Komplement gibt, dh. einen abgeschlossenen linearen Teilraum Q von T, sodass $T = Q \dot{\boxplus} R$ (direkte Summe).

    Zeige, dass das immer der Fall ist, wenn X und Y Hilberträume sind. Zeige, dass es unter der eingangs gemachten Voraussetzung an T einen abgeschlossenen linearen Operator $T_s : \operatorname{dom} T \to Y$ gibt, sodass
$$T = \big\{\big(x; y + T_s(x)\big) : x \in \operatorname{dom} T_s,\ y \in \operatorname{mul}(T)\big\}$$

Für die Definition von T^*, sowie der Begriffe "symmetrisch, selbstadjungiert", siehe Skriptum Definition 4.3.1 und 4.3.4.

In den folgenden Beispielen betrachten wir den Differentialoperator "minus zweite Ableitung" im Raum $H := L^2([0,1])$: Bezeichne stets
$$T := \big\{(f;g) \in H^2 :\ f \in C^1[0,1],\ f' \in AC[0,1],\ f'' = -g \text{ f.ü.}\big\}.$$

22. Zeige, dass T eine abgeschlossene lineare Relation in H^2 ist. Weiters bestimme $\operatorname{mul} T, \ker T, \operatorname{dom} T, \operatorname{ran} T$.

    Hinweis. Für die Abgeschlossenheit: Zeige zunächst, dass
$$T_0 := \big\{(f;g) \in T :\ f(0) = f'(0) = 0\big\}$$
abgeschlossen ist. Dazu bestimme T_0 explizit. Vergleiche T und T_0 als Teilräume von $H \times H$.

23. Seien T_{00} und A die Relationen
$$\begin{aligned} T_{00} &:= \big\{(f;g) \in T :\ f(0) = f'(0) = 0 = f(1) = f'(1)\big\}, \\ A &:= \big\{(f;g) \in T :\ f(0) = 0 = f(1)\big\}. \end{aligned}$$
Zeige, dass T_{00} symmetrisch ist, dass $T_{00} = T^*$ und $T^* = T_{00}$ ist. Weiters zeige, dass A selbstadjungiert ist.

    Hinweis. Berechne die Adjungierte von $f \mapsto \int_0^x \int_0^t f(s)\ dsdt$ als Abbildung von $L^2([0,1])$ nach $L^2([0,1])$. Partielle Integration.

24. Bestimme den Defektindex von T_{00}. Weiters berechne $\sigma(A)$ (insbesondere: ist $\infty \in \sigma(A)$?), sowie die Resolvente $(A - \lambda)^{-1},\ \lambda \in \rho(A)$ des Operators A.

    Hinweis. Löse mittels Variation der Konstanten die Differentialgleichung $-f'' - \lambda f = g, \quad g \in C([0,1])$ unter den Randbedingungen $f(0) = f(1) = 0$. Stelle die Lösung als Integral dar, und zeige das dieses Integral dann auch die Lösung von $(A - \lambda)f = g$ für beliebige $g \in L^2[0,1]$ ist.

25. Auf den Vektorräumen $\mathcal{H} := H \times H$ und $\mathcal{B} := \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ hat man in natürlicher Weise die Skalarprodukte $(.,.)_{H\times H}$ und $(.,.)_{\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^2}$ die sie als direktes Produktes von $(.,.)_H$ bzw. dem euklidischen Skalarprodukt $(.,.)_{\mathbb{C}^2}$ tragen. Wir betrachten noch andere Skalarprodukte, nämlich (I_H und $I_{\mathbb{C}^2}$ bezeichnen die entsprechenden Identitätsoperatoren, und auf der rechten Seite verstehen wir Elemente des direkten Produktes als Spaltenvektoren)
$$[(f_1,f_2),(g_1,g_2)]_{\mathcal{H}} := \left(\begin{pmatrix} 0 & -iI_H \\ iI_H & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}\right)_{H\times H}$$
$$[(x_1,x_2),(y_1,y_2)]_{\mathcal{B}} := \left(\begin{pmatrix} 0 & -iI_{\mathbb{C}^2} \\ iI_{\mathbb{C}^2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)_{\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^2}$$

Betrachte die Abbildung $\Gamma : T \to \mathcal{B}$ die definiert ist als

$$\Gamma(f,g) := \left(\begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f'(0) \\ -f'(1) \end{pmatrix} \right), \quad (f,g) \in T\,.$$

Zeige, dass Γ bezüglich der Skalarprodukte $[.,.]_{\mathcal{H}}$ und $[.,.]_{\mathcal{B}}$ isometrisch ist. Weiters zeige, dass Γ surjektiv ist.

Hinweis. Partielle Integration, und C^∞-Funktionen gehören immer zu $\operatorname{dom} T$.

26. Zeige, dass für jede Relation $A \subseteq T$ gilt

$$A^* = \Gamma^{-1}\left((\Gamma A)^{[\perp]_{\mathcal{B}}} \right),$$

wobei $[\perp]_{\mathcal{B}}$ das orthogonale Komplement bezüglich dem Skalarprodukt $[.,.]_{\mathcal{B}}$ bezeichnet.

Folgere, dass jede Relation ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

$$A := \left\{ (f,g) \in T : \; \cos\alpha f(0) + \sin\alpha f'(0) = 0,\; \cos\beta f(1) + \sin\beta f'(1) = 0 \right\}$$

selbstadjungiert ist. Bestimme ihr Spektrum.