4.Übung (5.12.2013)

27. Sei H ein seperabler Hilbertraum. Finde einen dicht definierten linearen Operator $T : \operatorname{dom} T \to H$, sodass $T^* = \{0\}$ (hier verstehen wir T^* als Teilmenge von $H \times H$).

    Hinweis. Wähle eine Orthonormalbasis $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, und definiere T auf $\operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ sodass T dicht in $H \times H$ ist.

28. Sei H ein Hilbertraum, $S \subseteq H \times H$ eine symmetrische und abgeschlossene Relation. Man zeige, dass im Falle von endlichen Defekt Indizes (n_+, n_-) immer $\operatorname{codim}_S S^* = n_+ + n_-$, wobei $\operatorname{codim}_S S^* = \dim S^*/S$.

    Wie groß ist dann $\operatorname{codim}_S A$, wenn $n_+ = n_-$ und A eine selbstadjungierte Erweiterung von S in $H \times H$ ist?

29. Sei $A \subseteq H \times H$ eine selbstadjungierte Relation, und sei $G \subseteq H$ eine nichtleere Teilmenge von H. Setze

    $$H_0 := \operatorname{cls}\big\{(A - z)^{-1}G : z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\big\}, \qquad A_0 := A \cap (H_0 \times H_0)\,.$$

    Zeige, dass A_0 selbstadjungiert ist.

    Hinweis. Es ist klar dass A abgeschlossen und symmetrisch ist. Zeige, dass H_0 unter allen Resolventen von A (!) invariant ist. Damit folgere dass der Defektindex von A_0 (!) gleich $(0, 0)$ ist.

30. Sei $H_2(\mathbb{D})$ die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ die eine Darstellung als Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ haben (der *Hardy Raum*). Zeige, dass die Abbildung

    $$\phi : f(z) \mapsto \Big(\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\Big)_{n=0}^{\infty}$$

    eine Bijektion von $H^2(\mathbb{D})$ auf $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ ist. Definiert man auf $H^2(\mathbb{D})$ ein Skalarprodukt sodass ϕ unitär wird, so wird also $H^2(\mathbb{D})$ zu einem Hilbertraum.

31. Betrachte die lineare Abbildung $V : H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ die definiert ist als $V(f)(z) := zf(z^2)$. Zeige, dass V isometrisch ist, und berechne den Defektindex (n_i, n_o) von V.

Seien H und B Hilberträume. Sei $S \subseteq H \times H$ eine abgeschlossene symmetrische Relation, und setze $T := S^*$. Betrachte die Räume $\mathcal{H} := H \times H$ und $\mathcal{B} := B \times B$ versehen mit den (indefiniten) Skalarprodukten

$$\Big[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\Big]_{\mathcal{H}} := \left(\begin{pmatrix} 0 & -iI_{\mathcal{H}} \\ iI_{\mathcal{H}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)_{H \times H}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}\,,$$

und genauso für $\mathcal{B}$.

Eine lineare Abbildung $\Gamma : T \to \mathcal{B}$ heisst eine Randwertabbildung für S, wenn sie surjektiv und isometrisch ist. Für eine solche Abbildung bezeichne stets $\Gamma_0 := \ker(\pi_+ \circ \Gamma), \Gamma_1 := \ker(\pi_- \circ \Gamma)$, wobei $\pi_\pm : \mathcal{B} \to B$ die Projektion von $\mathcal{B}$ auf die erste bzw. zweite Komponente bezeichnet.

In den folgenden drei Beispielen sei stets Γ eine Randwertabbildung für S.

32. Zeige, dass Γ sowie auch Γ_0 und Γ_1 stetig sind.

    Hinweis. Satz vom abgeschlossenen Graphen.

33. Zeige, dass $\ker \Gamma = S$.

34. Betrachte die Abbildung

    $$\Psi(\Theta) := \ker(\Gamma_1 - \Theta\Gamma_0), \quad \Theta \subseteq \mathcal{B}\,.$$

    Zeige, dass Ψ eine Bijektion induziert zwischen allen abgeschlossenen linearen Relationen in $\mathcal{B}$ einerseits, und allen abgeschlossenen linearen Relationen in $\mathcal{H}$ welche S enthalten und in T enthalten sind andererseits.

    Zeige, dass

    $$\Psi(\Theta^*) = (\Psi(\Theta))^*, \qquad \Psi(\Theta) \subseteq \Psi(\Theta') \iff \Theta \subseteq \Theta'$$

35. Wir haben bereits eine Randwertabbildung für den symmetrischen Operator im $L^2([0,1])$ der durch den Differentialausdruck $-y''$ und die Randbedingungen $y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0$ gegeben ist konstruiert. Finde in ähnlicher Weise eine Randwerttabbildung für den Operator der durch $-iy'$ und $y(0) = y(1) = 0$ gegeben ist.