5.Übung (19.12.2013)

36. Sei $\phi(x) := e^{-x^2}$. Betrachte den Operator S der definiert ist als

$$(Sf)(x) := \phi(x)f(x-1), \quad f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Zeige, dass S ein beschränkter Operator von $L^2(\mathbb{R})$ in sich ist und bestimme S^*. Weiters zeige, dass

$$\|S^n\| = \exp\Big(-\frac{(n-1)n(n+1)}{12}\Big), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

37. Betrachte wieder den Operator S aus dem vorigen Beispiel. Zeige, dass S injektiv ist, $\operatorname{ran}(S)$ dicht ist, und $\sigma(S) = \{0\}$ ist. Zeige, dass $T := S^{-1}$ ein abgeschlossener und dicht definierter Operator ist mit $\sigma(T) = \emptyset$.

38. Sei μ ein positives Borelmaß auf $\mathbb{R}$ mit $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|t|^2+1}\, d\mu(t) < +\infty$. Betrachte auf $H = L^2(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \mu, \mathbb{C})$ die lineare Relation $M_t := \{(f;g) \in H \times H : tf(t) = g(t)\ \mu-\text{f.ü.}\}$. Zeige, dass M_t ein selbstadjungierter Operator ist.

Weiters zeige man, dass alle $f \in \operatorname{dom} M_t$ integrierbar bzgl. μ sind. Schließlich sei $S \leq H \times H$ die Relation $\{(f;g) \in M_t : \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu = 0\}$. Zeigen Sie, dass S symmetrisch mit Defect $(1,1)$ ist, und dass für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ der Raum $\operatorname{ran}(S - \bar{z})^{\perp}$ von $(t \mapsto \frac{1}{t-z})$ aufgespannt wird. Was muss μ erfüllen, damit S nicht dicht definiert ist?

Hinweis: Für $M_t^* = M_t$ betrachten Sie $((M_t - z)^{-1})^*$!

39. Bestimme die Spektralschar des Operators M_t aus dem vorigen Beispiel.

40. Sei A ein (nicht notwendigerweise beschränkter) selbstadjungierter Operator in einem Hilbertraum H. Ein Element $u \in H$ heißt erzeugend für A, wenn $\operatorname{cls}\{(A-z)^{-1}u : z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\} = H$.

Sei nun vorausgesetzt, dass A ein erzeugendes Element u besitzt. Finde ein positives Borel-Maß μ auf $\mathbb{R}$ und eine unitäre Abbildung $U : H \to L^2(\mu)$ sodass

$$U \circ A = M_t \circ U.$$

Seien H, K ein Hilberträume, und T eine lineare Relation von H nach K. Dann heißt T kontraktiv, wenn

$$\|x\| \geq \|y\|, \quad (x;y) \in T.$$

Ist $H = K$, so heißt T dissipativ, wenn

$$\operatorname{Im}(y,x) \geq 0, \quad (x;y) \in T.$$

41. Zeige, dass eine Relation genau dann kontraktiv ist, wenn Sie (der Graph eines) beschränkten Operators mit Norm ≤ 1 ist.

Zeige, dass (im Fall $H = K$) eine Relation T genau dann dissipativ ist, wenn die Cayleytransformierte $\mathcal{C}(T)$ kontraktiv ist

42. Sei T eine lineare Relation in einem Hilbertraum H. Bezeichne $\mathbb{D}$ den offenen Einheitskreis, und $\mathbb{C}^-$ die offene untere Halbebene. Zeige:

$$(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \overline{\mathbb{D}} \subseteq r(T), \quad T \text{ kontraktiv},$$

$$\mathbb{C}^- \subseteq r(T), \quad T \text{ dissipativ}.$$

43. Sei $T : H \to K$ kontraktiv, und bezeichne $D_T := (I - T^*T)^{\frac{1}{2}}$. Zeige:

   (a) D_T ist wohldefiniert und $(D_T x, x) \geq 0$, $x \in H$.

(b) Es gilt $\|x\|^2 = \|Tx\|^2 + \|D_T x\|^2$, $x \in H$.

(c) T^* ist kontraktiv, und es gilt

$$TD_T = D_{T^*}T\,.$$

Hinweis. Für (c) approximiere die Funktion

$$f(t) := \begin{cases} \sqrt{t}\,, & t \geq 0 \\ 0 \quad , & t < 0 \end{cases}$$

auf einem geeigneten Interval mit Polynomen.

44. Seien $H, K, \tilde{H}, \tilde{K}$ Hilberträume mit $H \subseteq \tilde{H}$ und $K \subseteq \tilde{K}$, und sei $\tilde{T} : \tilde{H} \to \tilde{K}$ eine Kontraktion. Bezeichne mit π_K die orthogonale Projektion von $\tilde{K}$ auf K, und setze

$$T := \pi_K \tilde{T}|_H\,.$$

Zeige, dass T eine Kontraktion von H nach K ist.

Sei T eine Kontraktion von H nach K. Zeige, dass es Hilberträume $\tilde{H}$, $\tilde{K}$, und einen unitären Operator U von $\tilde{H}$ nach $\tilde{K}$ gibt, sodass $T := \pi_K U|_H$.

Hinweis. Betrachte $\tilde{H} := H \oplus K$, $\tilde{K} := K \oplus H$, und

$$U := \begin{pmatrix} T & D_{T^*} \\ D_T & -T^* \end{pmatrix}$$