6.Übung (16.1.2014)

45. Zeige, dass durch
$$T(t)f(s) := \begin{cases} 2f(t+s)\,, & s \in [-t, 0] \\ f(t+s)\ \ , & \text{sonst} \end{cases}$$
eine stark stetige Halbgruppe auf $L^1(\mathbb{R})$ gegeben ist. Zeige weiters, dass für diese die Abschätzung $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ nur gilt wenn $M \geq 2$ ist.

46. Sei X ein Banachraum, und $(T(t))_{t\in[0,+\infty)}$ eine Halbgruppe von Operatoren auf X. Zeige: Die Halbgruppe $(T(t))_{t\in[0,+\infty)}$ ist genau dann stark stetig ist, wenn es $M > 0$, $\delta > 0$ und einen dichten Teilraum E von X gibt, sodass
$$\|T(t)\| \leq M,\ t \in [0, \delta], \quad \lim_{t\to 0} \|T(t)x - x\| = 0,\ x \in E\,.$$

47. Sei $p \in [1, +\infty)$. Zeige, dass die Translationshalbgruppe $(T(t)f)(s) = f(s + t)$ eine stark stetige Halbgruppe auf $L^p(\mathbb{R})$ ist.

48. Sei $h_\lambda(x) := \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2+x^2}$. Zeige, dass durch ("$*$" bezeichnet den Faltungsoperator)
$$T(\lambda)f := \begin{cases} f * h_\lambda\,, & \lambda > 0 \\ f \quad\ \ , & \lambda = 0 \end{cases}$$
eine stark stetige Halbgruppe auf $L_1(\mathbb{R})$ definiert wird.

    Hinweis. Verwende
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2 + (x-y)^2}\frac{1}{\nu^2 + y^2}\,dy = \pi\frac{\lambda+\nu}{\lambda\nu}\frac{1}{(\lambda+\nu)^2 + x^2}\,,$$
    und
$$\int_{-\infty}^{\infty} h_\lambda(x)\,dx = 1 \quad \forall\lambda > 0\,.$$
    Mit Hilfe des Satzes von Fubini kann man die Konvergenz von $\|T_\lambda f - f\|_1$ gegen 0 für stetige Funktionen mit kompaktem Träger beweisen.

49. Sei A ein (nicht notwendig beschränkter) selbstadjungierter Operator in einem Hilbertraum H. Zeige, dass $(e^{itA})_{t\in\mathbb{R}}$ eine Gruppe von unitären Operatoren bildet (d.h., dass alle Operatoren e^{itA} unitär sind, und dass die Abbildung $t \mapsto e^{itA}$ ein Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ nach $\mathcal{B}(H)$ ist. Weiters zeige, dass
$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(e^{itA}g - g) = iAg, \quad g \in \mathrm{dom}(A)\,.$$
    Hinweis. Es gilt $\frac{e^{its}-1}{t} = i\int_0^s e^{it\tau}\,d\tau$.

50. Auf dem Banachraum $C([0, 1])$ sei die Kontraktionshalbgruppe $\{T(t)\}$ durch $(T(t)f)(s) = f(\min(1, t+s))$ gegeben. Man bestimme den infinitesimalen Erzeuger von T.

    Hinweis. Weise wirklich nach, dass der bestimmte Operator B tatsächlich der infinitesimale Erzeuger A von T ist. Dazu reicht es, sich von $A \subseteq B$ bzw. $B \subseteq A$ und $\lambda \in \rho(B)$ für hinreichend großes $\lambda > 0$ zu überzeugen (warum?).

51. Sei $H = L^2(\mathbb{R})$ und A der Multiplikationsoperator mit it, d.h. $f \mapsto itf(t)$ mit $\mathrm{dom}\, A = \{f \in H : itf(t) \in H\}$. Von welcher Halbgruppe ist A der infinitesimalen Erzeuger.

52. Man betrachte $L^2[0, +\infty)$ und die Operatoren $(T(t)f)(s) := f(t+s)$ darauf. Bestimme den infinitesimalen Erzeuger A von T und zeige, dass $S := (iA)^*$ symmetrisch ist. Bestimme weiters die Defektindizes von S.