7.Übung (30.1.2014)

53. Sei A ein abgeschlossener und dicht definierter Operator, und sei $\omega \in \mathbb{R}$. Dann ist A der infinitesimale Erzeuger einer stark stetige Halbgruppe mit $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$, genau dann wenn

    – $\{\lambda : \lambda > \omega\} \subseteq \rho(A)$,
    – $\|R_\lambda\| \leq (\lambda - \omega)^{-1}$, $\lambda > \omega$.

54. Sei T eine stark stetige Halbgruppe und A ihr infinitesimaler Erzeuger. Die Graphnorm $\|.\|_A$ auf $\operatorname{dom} A$ ist definiert durch $\|x\|_A := \|(x; Ax)\|_{X\times X}$, wobei $\|.\|_{X\times X}$ die Summennorm auf $X \times X$ ist.

    (a) Zeige, dass $(\operatorname{dom} A, \|.\|_A)$ ein Banachraum ist, und dass $T|_{\operatorname{dom} A}$ darauf eine stark stetige Halbgruppe ist.

    (b) Zeige weiters, dass für $x \in \operatorname{dom} A$ das Riemann-Integral $\int_0^r T(t)x\, dt$ sogar bzgl. $\|.\|_A$ existiert und in $\operatorname{dom} A$ liegt, und dass $\frac{1}{r}\int_0^r T(t)x\, dt \to x$ für $r \to 0$ bzgl. der Graphnorm.

    (c) Schließlich zeige: Ist $D \subseteq \operatorname{dom} A$ dicht in X bzgl. der Norm auf X, sodass $T(s)D \subseteq D,\ s \geq 0$, so ist $\overline{D} = \operatorname{dom} A$, wobei der Abschluss bzgl. $\|.\|_A$ zu verstehen ist.

    Hinweis. Zeige zuerst, dass aus $x_n \to x$ bzgl. $\|.\|_X$ folgt, dass $\int_0^r T(t)x_n\, dt \to \int_0^r T(t)x\, dt$ bzgl. $\|.\|_A$.

55. Sei $A \subseteq X \times X$ eine abgeschlossene lineare Relation mit $\operatorname{mul} A = \{0\}$ und $\lambda \in r(A)$. Zeige, dass $D \subseteq \operatorname{dom} A$ genau dann dicht bzgl. $\|.\|_A$ ist, wenn $(A - \lambda I)(D)$ dicht in $\operatorname{ran}(A - \lambda)$ bzgl. $\|.\|_X$.

56. Es sei A infinitesimaler Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe $\{T(t)\}$ auf einem Hilbertraum. Man zeige, dass $\{(T(t))^*\}$ eine stark stetige Halbgruppe mit infinitesimalem Erzeuger A^* ist.

    Hinweis. Starte mit A^* und der davon erzeugten Halbgruppe! Warum existiert diese? Verwende den Satz von Hille-Yoshida!

57. Zeige direkt dass für einen Hilbertraum H und eine stark stetige Halbgruppe bestehend aus isometrischen Operatoren i mal ihr infinitesimaler Erzeuger A symmetrisch ist. Weiters zeige, dass iA sogar selbstadjungiert ist, falls die Operatoren der Halbgruppe alle unitär sind.

    Hinweis. Zeige, dass $(y, x) + (x, y) = 0$ falls $(x; y) \in A$.

58. Zeige mit dem Satz von Hille–Yoshida, dass die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = \frac{d^2}{dx^2} f(x,t)$$

    für jede Anfangsbedingung $f(x, 0) = f_0(x)$ eine Lösung in $C([0, 1] \times \mathbb{R}_+)$ hat, die den Randbedingungen

$$\frac{\partial}{\partial x} f_0(0) = \frac{\partial}{\partial x} f_0(1) = 0$$

    genügt.

59. Betrachte wieder die Halbgruppe $(T(t)f)(s) = f(\min(1, t + s))$ auf $C([0, 1])$. Sei A_λ die Yoshida–Approximationen ihres infinitesimalen Erzeugers. Zeige: Für jedes $\epsilon > 0$ existieren $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\in \mathbb{N}N$ mit

$$\left|(T(t)f)(s) - \sum_{k=0}^{N} \frac{t^k}{k!}(A_\lambda^k f)(s)\right| < \epsilon, \quad s, t \in [0, 1]\,.$$

    Leite mit diesem Ergebnis den Approximationssatz von Weierstraß (dass der Raum der Polynome dicht in $C([0, 1])$ liegt) her.