Übungen zu Fana1 SS11, 3. Übung

1. (a) Sei $H = L^2[-1,1]$ (bzgl. dem Lebesgueschen Maß). Zeigen Sie, dass die Menge M aller fast überall geraden Funktionen einen abgeschlossenen Teilraum von H abgibt; bestimmen Sie dessen orthogonales Komplement sowie die orthogonale Projektion auf M.

   (b) Sei $(H, (.,.))$ ein Hilbertraum und $x_1, \dots, x_n$ ein endliches ONS. Stellen Sie die orthogonale Projektion auf $\operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ mit Hilfe von $(.,.)$ explizit dar!

2. Sei H ein Hilbertraum und P_1, P_2 orthogonale Projektionen. Dann sind äquivalent:

   (i) $P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$.

   (ii) $\operatorname{ran} P_1 \perp \operatorname{ran} P_2$.

   (iii) $P_1 + P_2$ ist eine orthogonale Projektion.

   Man bestimme in diesem Falle $\operatorname{ran}(P_1 + P_2)$ und $\ker(P_1 + P_2)$.

3. Sei $H = \mathbb{C}_n[z]$ die Menge aller komplexen Polynome vom Grad $\leq n$ versehen mit $(p, q) := \int_{-1}^{1} p(t)\bar{q}(t)\, dt$. Zeigen Sie, dass $(H, (.,.))$ ein Hilbertraum ist! Weiters sei $w \in \mathbb{C}$ fest. Zeigen Sie, dass es ein $k_w \in \mathbb{C}_n[z]$ gibt, sodass

$$p(w) = \int_{-1}^{1} p(t)\bar{k}_w(t)\, dt$$

   für alle $p \in \mathbb{C}_n[z]$.

   Gibt es auch so ein k_w, dass $\int_{(-1,1)} p(t)\bar{k}_w(t)\, d\mu(t) = p(w)$ mit einem positiven Maß μ für alle $p \in \mathbb{C}_n[z]$, wenn $\mu((-1,1) \setminus M) = 0$ für eine endliche Menge $M \subseteq (-1,1)$ mit weniger als $n+1$ Elementen?

4. Sei K die Menge aller reellen Polynome mit Grad $\leq n$ (n fest), für die $p'' \geq 0$ auf einem gegebenen Intervall $[a,b]$ gilt. Man zeige, dass es zu einem $f \in L^2([a,b], \lambda_1)$ genau ein $p_0 \in K$ gibt, sodass

$$\int_{[a,b]} |f - p_0|^2\, d\lambda_1 \leq \int_{[a,b]} |f - p|^2\, d\lambda_1$$

   für alle $p \in K$.

   Hinweis: Die Menge aller komplexen Polynome vom Grad $\leq n$ ist ein endlich dimensionaler Unterraum und $p \mapsto p(t)$ sowie $p \mapsto p''(t)$ ist ein lineares Funktional auf diesem Unterraum für jedes $t \in [a,b]$.

5. Sei $(H, (.,.))$ ein Hilbertraum und sei $X_i,\ i \in I$, eine Familie von abgeschlossenen Teilräumen, sodass $X_i \perp X_j$ für $i \neq j$ und sodass die lineare Hülle von $\bigcup_{i \in I} X_i$ dicht in H ist. Sei $\bigoplus_{i \in I} X_i$ der Hilbertraum X aus dem Beispiel 5 der zweiten Übung. Schließlich sei P_i die orthogonale Projektion von H auf X_i.

   Zeigen Sie, dass H vermöge der Abbildung $x \mapsto (P_i x)_{i \in I}$ isometrisch isomorph zu $\bigoplus_{i \in I} X_i$ ist, und bestimmen Sie die Inverse dieses Isomorphismuses.

6. Man zeige folgendes System von Funktionen ist ein ONS aber keine ONB des Hilbert Raumes $L^2[0,1]$ (versehen mit dem Lebesgue-Maß) ($n \in \mathbb{N}$).

$$f_n(t) = \operatorname{sgn}(\sin(2^n \pi t)), \ t \in [0,1].$$

7. Das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt: Sei $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine lineare unabhängige Teilmenge des Hilbertraumes H. Definiere induktiv:

$$u_1 := \frac{x_1}{\|x_1\|} ,$$

$$v_n := x_n - \sum_{i=1}^{n-1} (x_n, u_i) u_i, \ u_n := \frac{v_n}{\|v_n\|} .$$

   Man zeige, dass $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem ist, wobei

$$\operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_N\} = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_N\} .$$

   Man zeige, dass man eine eine Orthogonalbasis erhält, wenn $\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in H ist.

8. Betrachte den Raum $L^2([0,2\pi),\mu)$, wobei $\mu = \frac{1}{2\pi}\lambda_1$ (λ_1 ist das Lebesguesche Maß auf $[0,2\pi)$), und seine Elemente bzw. Teilräume

$$e_n(t) := e^{int}, \ n \in \mathbb{Z}, \qquad u_n(t) := \frac{e_{-n}(t) + n e_n(t)}{\sqrt{1+n^2}}, \ n \in \mathbb{N},$$

$$M := \overline{\operatorname{span}\{e_n : n = 0,1,2,\ldots\}}, \quad N := \overline{\operatorname{span}\{u_n : n = 1,2,\ldots\}} .$$

   Zeige:

   (a) $\{e_n : n = 0,1,2,\ldots\}$ bzw. $\{u_n : n = 1,2,\ldots\}$ sind Orthonormalbasen von M bzw. N.

   (b) $M \cap N = \{0\}$.

   (c) $M \dot{+} N$ ist dicht in $L^2([0,2\pi),\mu)$, aber nicht gleich ganz $L^2([0,2\pi),\mu)$.

   (d) Die Projektion des normierten Raumes $X := M \dot{+} N$ mit Bild M und Kern N ist nicht stetig.