Übungen zu Fana1 SS11, 7. Übung

1. Sei H ein Hilbertraum und $V \in \mathcal{B}(H)$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

   (i) V ist isometrisch.

   (ii) Für jedes Orthonormalsystem $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ ist $\{Uu_\alpha : \alpha \in A\}$ wieder ein Orthonormalsystem.

   (iii) Es existiert ein vollständiges Orthonormalsystem (ONB) $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$, sodass $\{Uu_\alpha : \alpha \in A\}$ ebenfalls ein Orthonormalsystem ist.

   Schließlich zeigen Sie, dass $V^*V = I$ und dass VV^* die orthogonal-Projektion auf $\operatorname{ran} V$. Geben Sie ein Beispiel eines isometrischen $V \in \mathcal{B}(H)$ an, das nicht unitär ist.

2.
   - Seien H ein Hilbertraum und M ein abgeschlossener Unterraum. Weiters bezeichne $\iota_M : M \to H$ die Einbettungsabbildung $\iota_M(x) = x,\ x \in M$. Man bestimme die Hilbertraumdjungierte von ι_M.
   - Sei X eine Menge, μ ein σ-endliches Maß auf X und $k \in L^2(\mu\times\mu)$. Betrachte den Integraloperator K mit Kern k, das ist der Operator

   $$(Kf)(x) := \int\limits_X k(x,t) f(t) d\mu(t) \, .$$

   Bekannterweise ist $K \in \mathcal{B}(L^2(\mu))$. Man zeige K^* ist ein Integraloperator der gleichen Bauweis. Bestimmen Sie dabei das entsprechende k.

3. Zeigen Sie: Sei $T \in \mathcal{B}(H)$ positiv, daher $(Tx, x) \geq 0$ für alle $x \in H$. Dann existiert genau ein (!!!) positiver Operator $A \in \mathcal{B}(H)$ mit $T = A^2$. Man bezeichnet A als $T^{\frac{1}{2}}$. Ist T kompakt, so zeige man, dass auch $T^{\frac{1}{2}}$ kompakt ist.

   Hinweis: Wie stehen die Spektralmaße von T und A in Relation?

4. Sei H ein Hilbertraum. Ein Operator W mit der Eigenschaft, dass $W|_{(\ker W)^\perp}$ isometrisch ist, heißt *partielle Isometrie*. Zeige: Sei $T \in \mathcal{B}(H)$. Dann existiert ein positiver Operator A und eine partielle Isometrie W mit $\ker W = \ker A$, $\operatorname{ran} W = \overline{\operatorname{ran} T}$, sodass $T = WA$. Man spricht von der *Polarzerlegung* eines Operators.
   Hinweis: Definiere A als $(T^*T)^{\frac{1}{2}}$.

5. Die Schmidt-Reihe für einen kompakten Operator: Sei $T \in \mathcal{B}(H)$ kompakt. Dann existieren Orthonormalsysteme

   $$\{\phi_n : n = 1, 2, \ldots\}, \quad \{\psi_n : n = 1, 2, \ldots\},$$

   sowie Zahlen s_n mit $0 < \ldots \leq s_n \leq s_{n-1} \leq \ldots \leq s_1 = \|T\|$, sodass gilt

   $$T = \sum_n s_n(\cdot, \phi_n)\psi_n \, ,$$

   wobei die Reihe in der Operatornorm konvergiert. Die s_n heißen s-Zahlen von T, und ihre Quadrate sind gerade die Eigenwerte von T^*T.

   Hinweis: Verwende die Polarzerlegung von T und den Spektralsatz für T^*T.

6. Sei H ein Hilbertraum und sei $P \in B(H)$ eine orthogonal-Projektion. Berechnen Sie $\sigma(P)$, $\sigma_p(P)$ sowie das dazugehörige Spektralmaß $E : \sigma(P) \to B(H)$.

7. Sei $A : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ definiert durch $(Af)(x) = i \int_{[0,x]} f \, d\lambda - \frac{i}{2} \int_{[0,1]} f \, d\lambda$. Zeigen Sie, dass A ein kompakter selbstadjungierter Operator ist.

   Bestimmen Sie $\|A\|$, $\sigma(A)$, $\sigma_p(A)$, $r(A)$, $\gamma_-(A)$, $\gamma_+(A)$, $W(A)$.

8. Sei A wie im vorherigen Beispiel. Bestimmen Sie für alle $\lambda \in \sigma_p(A)$ die Eigenräume $\ker(A - \lambda I)$ sowie das dazugehörige Spektralmaß $E : \sigma(A) \to B(H)$.

   Schließlich gebe man eine ONB wie im Spektralsatz für selbstadjungierte kompakte Operatoren an!

9. Sei $A = A^* \in B(H)$, und sei E das dazugehörige Spektralmaß. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $E_\lambda := E(\sigma(A) \cap (-\infty, \lambda])$.

   Zeigen Sie, dass für ein stetiges $\phi : [\gamma_-(A), \gamma_+(A)] \to \mathbb{C}$ das Riemann-Stieltjes Integral
   $$\int_{\gamma_-(A)-}^{\gamma_+(A)} \phi \, dE_\lambda := \lim_{|\mathcal{R}| \to 0} \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} \phi(\alpha_j)(E_{\xi_j} - E_{\xi_{j-1}}),$$
   wobei die Riemannzerlegung $\mathcal{R}$ die Stützstellen ξ_j und die Zwischenstellen α_j hat, bezüglich der Operatornorm gegen $\int \phi|_{\sigma(A)} dE$ konvergiert.

   Bemerkung: Das ist die klassische Art und Weise, wie $\Phi_E(\phi)$ definiert ist.