# Übung zu Funktionalanalysis 1
# 1.Übung (21.3.2014)

1. Sei $X$ ein Vektorraum (über $\mathbb{C}$) und $p : X \to [0, \infty)$. Es habe $p$ die Eigenschaften

   $(i)$ $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

   $(ii)$ $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, $x \in X, \lambda \in \mathbb{C}$.

   Zeige, dass $p$ genau dann eine Norm ist, wenn die Menge

   $$B(p, 1) := \big\{ x \in X : p(x) \leq 1 \big\}$$

   konvex ist.

2. Sei $X$ ein Vektorraum (über $\mathbb{C}$) und sei $d : X \times X \to [0, \infty)$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

   (A) Es existiert eine Norm $\|.\|$ auf $X$ mit $d(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in X$.

   (B) Die Abbildung $d$ ist eine Metrik mit den zusätzlichen Eigenschaften $d(x + z, y + z) = d(x, y)$, $x, y, z \in X$, und $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$, $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

3. Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum, $X \neq \{0\}$, und bezeichne $\mathcal{T}$ die initiale Topologie auf $X$ bezüglich der Abbildung $\|.\| : X \to [0, \infty)$. Sei $x \in X$. Finde eine Umgebungsbasis von $x$. Zeige, dass $\mathcal{T}$ verschieden von der Normtopologie ist.

4. Sei $I$ überabzählbar und seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, topologische Räume sodaß keine der Topologien gleich der Klumpentopologie $\{\emptyset, X_i\}$ ist. Zeige, dass es keine Metrik auf dem Raum $X := \prod_{i \in I} X_i$ gibt welche die Produkttopologie $\mathcal{T}$ auf $X$ induziert.
   Hinweis: Wähle einen Punkt $(x_i)_{i \in I} \in X$ sodaß jedes $x_i$ in einer nichttrivialen offenen Menge $O_i \subsetneq X_i$ liegt. Gäbe es eine Metrik die $\mathcal{T}$ induziert, so hätte der Umgebungsfilter dieses Punktes eine abzählbare Basis. Daraus leite einen Widerspruch ab.

5. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum, und sei $A \subseteq X$. Zeige:

   (a) Ist $A$ symmetrisch, so ist auch $A^\circ$ symmetrisch.

   (b) Sei $A$ kreisförmig. Dann ist $A^\circ$ genau dann kreisförmig, wenn entweder $A^\circ = \emptyset$ oder $0 \in A^\circ$.

   (c) Die Menge $\bigcup_{\substack{\lambda \in \mathbb{C} \\ |\lambda| \leq 1}} \lambda A$ ist kreisförmig.

   (d) Finde ein Beispiel einer kreisförmigen Menge, deren Inneres nicht kreisförmig ist.

6. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum, $A \subseteq X$, und $\mathfrak{W}$ eine Nullumgebungsbasis von $X$. Dann gilt

   $$\overline{A} = \bigcap_{W \in \mathfrak{W}} (A + W) \, .$$

7. Sei $X$ ein topologischer Vektorraum und $f : X \to \mathbb{C}$ linear und nicht identisch Null. Dann ist für jede kreisförmige Menge $K \subseteq X$ auch $f(K) \subseteq \mathbb{C}$ kreisförmig, und für jede kreisförmige Menge $M \subseteq \mathbb{C}$ auch $f^{-1}(M) \subseteq X$ kreisförmig.

   Weiters ist für jede offene Menge $O \subseteq X$ auch $f(O) \subseteq \mathbb{C}$ offen. Muss stets für jede offene Menge $M \subseteq \mathbb{C}$ auch $f^{-1}(M) \subseteq X$ offen sein ?

8. Betrachte den normierten Raum $\ell^2$, und die Elemente

   $$b := (\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}, \quad e_n := (\delta_{kn})_{n \in \mathbb{N}} \, ,$$

   wobei

   $$\delta_{kn} := \begin{cases} 1 & , \ k = n \\ 0 & , \ k \neq n \end{cases}$$

Zeige, dass die Menge $\{b, e_1, e_2, \ldots\}$ linear unabhängig in $\ell^2$ ist. Zeige, dass jedes lineare Funktional $\phi : \ell^2 \to \mathbb{C}$ mit

$$\phi(b) = 1, \quad \phi(e_n) = 0, \; n \in \mathbb{N},$$

unstetig ist. Gibt es ein solches lineares Funktional?

9. Sei $X$ ein normierter Raum mit $\dim X = \infty$. Zeige, dass es ein unstetiges lineares Funktional auf $X$ gibt. Sei $X$ ein endlichdimensionaler topologischer Vektorraum. Gibt es ein unstetiges lineares Funktional auf $X$ ?

10. Für $0 < p < 1$ betrachte den Raum $L^p(0,1)$ aller (Äquivalenzklassen von) messbaren komplexwertigen Funktionen definiert auf $(0,1)$, und definiere eine Abbildung durch

$$d_p(f,g) := \int_{(0,1)} |f(x) - g(x)|^p \, dx, \quad f, g \in L^p(0,1).$$

(a) Zeige, dass $d_p$ eine Metrik auf $L^p(0,1)$ ist. Ist diese Metrik von einer Norm induziert?

(b) Ist $V \subseteq L^p(0,1)$ Umgebung von 0, und ist $V$ konvex, so folgt $V = L^p(0,1)$.

(c) Es keine, von der Nullabbildung verschiedene, stetige lineare Abbildung $f : L^p(0,1) \to \mathbb{C}$.

Hinweis: Sei $V$ konvexe Nullumgebung, $r > 0$, sodass $U_r(0) := \{g \in L^p(0,1) : \Delta(g) < r\} \subseteq V$. Sei $f \in L^p(0,1)$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $n^{p-1}\Delta(f) < r$, $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ mit $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)|^p dt = n^{-1}\Delta(f)$ und setze $g_i(t) := nf(t)\mathbb{1}_{[x_{i-1},x_i]}$, sodass $f = n^{-1}(g_1 + \ldots + g_n)$.