

Übung zu Funktionalanalysis 1

2. Übung (11.4.2014)

11. Sei $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ ein linearer Raum mit positiv definitem Skalarprodukt, und $(\iota, (H, (\cdot, \cdot)_H))$ eine Hilbertraumvervollständigung von X . Bezeichne $\iota^* : H^* \rightarrow X^*$ die zu ι duale Abbildung. Zeige, dass

$$X' = \{\iota^*((\cdot, y)_H) : y \in H\}.$$

12. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, und erfülle $\|\cdot\|$ die Parallelogrammregel. Zeige, dass es ein Skalarprodukt gibt welches die Norm $\|\cdot\|$ induziert.

Hinweis: Definiere eine Abbildung $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ so wie man es machen muss, und zeige schrittweise

- $(x, x) = \|x\|^2$, $x \in X$, und $(x, y) = \overline{(y, x)}$, $x, y \in X$;
- $(x + y, z) = 2(x, z/2) + 2(y, z/2)$, $x, y, z \in X$;
- $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$, $x, y, z \in X$, und $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$, $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

13. Betrachte den Raum $\mathbb{C}_n[z]$ aller Polynome mit komplexen Koeffizienten mit Grad höchstens n . Zeige, dass $(p, q) := \int_{-1}^1 p(t) \overline{q(t)} dt$ ein positiv definites Skalarprodukt auf $\mathbb{C}_n[z]$ ist, und dass $(\mathbb{C}_n[z], (\cdot, \cdot))$ ein Hilbertraum ist. Zeige, dass es zu jedem $w \in \mathbb{C}$ und $l \in \mathbb{N}_0$ ein eindeutiges Element $K_{w;l} \in \mathbb{C}_n[z]$ gibt, sodass

$$p^{(l)}(w) = \int_{-1}^1 p(x) \overline{K_{w;l}(x)} dx, \quad p \in \mathbb{C}_n[z].$$

14. Betrachte wieder den Raum $\mathbb{C}_n[z]$ aller Polynome mit komplexen Koeffizienten mit Grad höchstens n versehen mit dem Skalarprodukt $(p, q) := \int_{-1}^1 p(t) \overline{q(t)} dt$, und sei $K_{w;l}$ jenes Element mit $p^{(l)}(w) = (p, K_{w;l})$, $p \in \mathbb{C}_n[z]$. Zeige, dass $K_{w;0}(z) = \overline{K_{z;0}(w)}$, $z, w \in \mathbb{C}$, und $K_{w;1} = K'_{w;0}$, $w \in \mathbb{C}$.

15. Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei

$$K := \{p \in \mathbb{C}_n[z] : p \text{ hat reelle Koeffizienten, } p''(x+2) \geq p'(x-2), x \in [0, 1], \}.$$

Zeige, dass es zu jeder Funktion $f \in L^2([-1, 1])$ genau ein Polynom $p_0 \in K$ gibt, sodass

$$\int_{-1}^1 |f(t) - p_0(t)|^2 dt \leq \int_{-1}^1 |f(t) - p(t)|^2 dt, \quad p \in K.$$

Hinweis: Zeige dass K abgeschlossen und konvex ist.

16. Sei μ das normierte Lebesguemaß $d\mu = \frac{1}{2\pi} dx$. Betrachte die Elemente bzw. Teilräume im $L^2([0, 2\pi), \mu)$ die definiert sind als

$$e_n(t) := e^{int}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad u_n(t) := \frac{e_{-n}(t) + ne_n(t)}{\sqrt{1+n^2}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$M := \overline{\text{span}\{e_n : n = 0, 1, 2, \dots\}}, \quad N := \overline{\text{span}\{u_n : n = 1, 2, \dots\}}.$$

Zeige die folgenden Aussagen.

- (a) Die Räume M und N sind, versehen mit dem $L^2(\mu)$ -Skalarprodukt, Hilberträume. Die Mengen $\{e_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ bzw. $\{u_n : n = 1, 2, \dots\}$ sind Orthonormalbasen von M bzw. N .
- (b) $M \cap N = \{0\}$.
- (c) $M \dot{+} N$ ist dicht in $L^2([0, 2\pi), \mu)$, aber nicht gleich ganz $L^2([0, 2\pi), \mu)$.
- (d) Die Projektion des normierten Raumes $X := M \dot{+} N$ mit Bild M und Kern N ist nicht stetig.

17. Führe das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren im Raum $L^2(-1, 1)$ ausgehend von der Folge $(x^n)_{n=0}^\infty$ durch. Zeige, dass das entstehende Orthonormalsystem $(b_n)_{n=0}^\infty$ eine Orthonormalbasis ist, und gegeben ist als $b_n = \sqrt{n + \frac{1}{2}} P_n$ wobei P_n das n -te Legendre Polynom ist.
18. Sei μ das normierte Lebesguemaß $d\mu = \frac{1}{2\pi} dx$, sei A eine nichtleere Teilmenge von \mathbb{Z} , und setze

$$H(A) := \left\{ f \in L^2([0, 2\pi), \mu) : \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx = 0, n \in A \right\}.$$

Zeige, dass $H(A)$ ein abgeschlossener Teilraum von $L^2(0, 2\pi)$ ist, und finde eine Orthonormalbasis des Hilbertraumes $H(A)$.

Bestimme das orthogonale Komplement von $H(A)$, und finde eine explizite Formel für die orthogonale Projektion von $L^2([0, 2\pi), \mu)$ auf $H(A)$.

19. Ein Hilbertraum heißt *H separabel*, wenn er eine abzählbare und dichte Teilmenge besitzt. Zeige, dass für einen Hilbertraum H die folgenden Aussagen äquivalent sind:
- (i) H ist separabel.
 - (ii) H hat eine höchstens abzählbare Orthonormalbasis.
 - (iii) Es gibt eine höchstens abzählbare Teilmenge N von H sodass die lineare Hülle $\text{span } N$ dicht in H ist.
20. Sei $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ ein Hilbertraum, und $[\cdot, \cdot]$ ein weiteres Skalarprodukt auf H . Sei vorausgesetzt dass $[\cdot, \cdot]$ eine stetige koerzive Sesquilinearform ist, d.h., dass (hier bezeichnet $\|\cdot\|_H$ die von $(\cdot, \cdot)_H$ induzierte Norm)

$$\exists C > 0 \forall x, y \in H : |[x, y]| \leq C \|x\|_H \|y\|_H, \quad \exists m > 0 \forall x \in H : [x, x] \geq m \|x\|_H^2.$$

Weiters bezeichne G den Gram-Operator der Sesquilinearform $[\cdot, \cdot]$ bzgl. $(\cdot, \cdot)_H$.

Zeige, dass es einen eindeutigen Operator $T \in \mathcal{B}(H)$ gibt, sodass $GT = TG = \text{id}_H$ gilt.

Hinweis: Zeige, dass $(H, [\cdot, \cdot])$ ein Hilbertraum ist.