Übung zu Funktionalanalysis 1
4.Übung (23.5.2014)

31. Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum und $(\hat{X}, \|.\|)$ eine Vervollständigung von X mit $X \subseteq \hat{X}$.

    (i) Zeige, dass $f \mapsto f|_X$ ein isometrischer Isomorphismus von $\hat{X}'$ auf X' ist.

    (ii) Bezeichne B die abgeschlossene Einheitskugel von $(\hat{X})'$. Zeige, dass (hier verstehen wir die Notation $\sigma(\hat{X}', X)$ wie üblich als $\sigma(\hat{X}', \iota(X))$ wobei ι die kanonische Einbettung von $\hat{X}$ in seinen Bidual ist)

    $$\sigma\big(\hat{X}', \hat{X}\big) \supseteq \sigma(\hat{X}', X), \quad \big(B, \sigma\big(\hat{X}', \hat{X}\big)|_B\big) = \big(B, \sigma\big(\hat{X}', X\big)|_B\big).$$

    (iii) Zeige: Falls $X \neq \hat{X}$, dann gilt in der Inklusion aus (ii) nicht Gleichheit.

32. Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum. Da die kanonische Einbettung $\iota : X \to X''$ den Raum X isometrisch und bijektiv auf $\iota(X)$ abbildet, ist sie ein Homöomorphismus von $(X, \|.\|_X)$ auf $(\iota(X), \|.\|_{X''}|_{\iota(X)}))$. Man zeige auf zwei Arten, dass ι auch ein Homöomorphismus von $(X, \sigma(X, X'))$ auf $(\iota(X), \sigma(X'', X')|_{\iota(X)})$ ist. Nämlich: (1) betrachte explizit Nullumgebungsbasen der entsprechenden Topologien; (2) argumentiere mittels der Transitivitätseigenschaft initialer Topologien.

33. Sei X ein Banachraum. Dann sind äquivalent:

    (i) X ist reflexiv.

    (ii) X' ist reflexiv.

    (iii) Die abgeschlossene Einheitskugel B_X von X ist w-kompakt, d.h. kompakt bezüglich $\sigma(X, X')$.

    Hinweis: Zeige mit Hilfe des Satzes von Banach-Alaoglu und der letzten Aufgabe, dass „X reflexiv $\Rightarrow$ $B_X, B_{X'}$ w-kompakt“. Mit Hilfe der letzten Aufgabe und dem Satz von Goldstine zeige, dass „B_X w-kompakt $\Rightarrow \iota(B_X) = B_{X''}$“. Für „$(ii) \Rightarrow (i)$“ erinnere man sich zusätzlich daran dass der schwache Abschluss bei konvexen Mengen gleich dem Norm-Abschluss ist.

34. Sei X ein normierter Raum. Zeige, dass jede in X schwach konvergente Folge bezüglich der Norm auf X beschränkt ist. Finde einen Hilbertraum H und eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in H mit

    $$\|x_n\| = 1,\ n \in \mathbb{N}, \qquad x_n \xrightarrow{w} 0.$$

35. Seien X, Y, Z normierte Räume, und seien $A_n, A \in \mathcal{B}(Y, Z)$, $B_n, B \in \mathcal{B}(X, Y)$. Dann gilt:

    (a) Ist $A_n \xrightarrow{s} A$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < \infty$, und $B_n \xrightarrow{s} B$, so folgt $A_nB_n \xrightarrow{s} AB$.

    (b) Ist $A_n \xrightarrow{w} A$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < \infty$, und $B_n \xrightarrow{s} B$, so folgt $A_nB_n \xrightarrow{w} AB$.

    (c) Ist $A_n \xrightarrow{s} A$, so folgt $A_nB \xrightarrow{s} AB$. Ist $B_n \xrightarrow{s} B$, so folgt $AB_n \xrightarrow{s} AB$.

    (d) Ist $A_n \xrightarrow{w} A$, so folgt $A_nB \xrightarrow{w} AB$. Ist $B_n \xrightarrow{w} B$, so folgt $AB_n \xrightarrow{w} AB$.

36. Seien X, Y Banachräume, und sei $Z \subseteq Y'$ ein punktetrennender linearer Teilraum. Bezeichne mit $\mathcal{T}_{\|.\|_X}$ und $\mathcal{T}_{\|.\|_Y}$ die Normtopologien auf X und Y, und sei $\sigma(Y, Z)$ die von Z auf Y induzierte schwache Topologie.

    Sei nun $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Zeige, dass T $\mathcal{T}_{\|.\|_X}$-$\mathcal{T}_{\|.\|_Y}$–stetig ist, genau dann wenn T $\mathcal{T}_{\|.\|_X}$-$\sigma(Y, Z)$–stetig ist.

37. Ein linearer Operator zwischen normierten Räumen heißt invertierbar, wenn er bijektiv ist und seine Inverse beschränkt.

    Seien X, Y normierte Räume. Zeige:

    (a) Ist $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ invertierbar, so ist auch $T' \in \mathcal{B}(Y', X')$ invertierbar.

(b) Bezeichne mit $\iota_X : X \to X''$ und $\iota_Y : Y \to Y''$ die kanonischen Einbettungen. Ist $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, so gilt

$$\iota_Y \circ T = T'' \circ \iota_X \,.$$

38. Sei X ein normierter Raum, und seien $T, T_n \in \mathcal{B}(X)$. Dann gilt

$$T_n \overset{w}{\to} T \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, y' \in Y' : \; T_n' y' \overset{w^*}{\to} T' y'$$

39. Seien X, Y kompakte Hausdorff Räume, sei $\tau : Y \to X$ stetig, und $A \in \mathcal{B}(C(X), C(Y))$ der Operator $Af := f \circ \tau$. Zeige, dass sein Konjugierter $A' \in \mathcal{B}(M(Y), M(X))$ gegeben ist durch

$$(A'\mu)(\Delta) = \mu(\tau^{-1}(\Delta)), \quad \mu \in M(Y), \Delta \subseteq X \text{ Borelmenge}\,.$$

40. Betrachte den Operator T der für $f \in L^1(0,1)$ definiert ist als

$$Tf := \Big(\int_0^1 f(t) t^n \, dt \Big)_{n \in \mathbb{N}_0}$$

Die Zahlen $\int_0^1 f(t) t^n \, dt$ heißen auch die Momente von f. Zeige, dass T zu $\mathcal{B}(L^1(0,1), C_0(\mathbb{N}_0))$ gehört, und bestimme $T' \in \mathcal{B}(\ell^1(\mathbb{N}_0), L^\infty(0,1))$.