Übung zu Funktionalanalysis 1
6.Übung (13.6.2014)

Shift-Operatoren

51. Betrachte den Shift-Operator S am $\ell^2(\mathbb{N})$, das ist

$$S : \begin{cases} \ell^2(\mathbb{N}) & \to & \ell^2(\mathbb{N}) \\ (x_1, x_2, x_3, \dots) & \mapsto & (0, x_1, x_2, \dots) \end{cases}$$

   (a) Zeige dass S isometrisch ist, bestimme $\operatorname{ran} S$ und zeige dass $\operatorname{ran} S$ abgeschlossen ist, und zeige $\bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{ran}(S^n) = \{0\}$.

   (b) Bestimme die Hilbertraumadjungierte S^* von S, und bestimme $\ker(S^*)$, $\operatorname{ran}(S^*)$, und $\bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{ran}([S^*]^n)$.

52. Sei wieder S der Shift-Operator am $\ell^2(\mathbb{N})$.

   (a) Zeige, dass

$$\begin{aligned} \sigma_p(S^*) = \sigma_r(S) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}, \\ \sigma_c(S^*) = \sigma_c(S) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}, \\ \sigma_r(S^*) = \sigma_p(S) &= \emptyset . \end{aligned}$$

   (b) Bestimme $\sigma_{app}(S)$ und finde zu jedem Punkt $\lambda \in \sigma_{app}(S)$ eine Folge wie in der Definition des approximativen Punktspektrums verlangt.

   (c) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| \neq 1$ bestimme $\dim\big(\ell^2(\mathbb{N})/\operatorname{ran}(S - \lambda)\big)$.

53. Sei U der rechts-Shift am $\ell^2(\mathbb{Z})$, das ist der Operator

$$U\big((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\big) := (x_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}},\ (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) .$$

   Berechne U^*, und bestimme $\sigma_p(U), \sigma_c(U), \sigma_r(U)$. Bestimme $\sigma_{app}(U)$ und finde zu jedem Punkt $\lambda \in \sigma_{app}(U)$ eine Folge wie in der Definition des approximativen Punktspektrums verlangt.

54. Sei S wieder der Shift-Operator am $\ell^2(\mathbb{N})$, sei $M_\phi \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ der Multiplikationsoperator mit der Funktion ϕ definiert als $\phi(n) := \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, und setze $T := MS$.

   (a) Für $k \in \mathbb{N}$ bestimme $\|T^k\|$ und berechne $\lim_{n\to\infty} \|T^k\|^{\frac{1}{k}}$.

   (b) Zeige dass T kompakt ist.

   (c) Zeige dass $\sigma_p(T) = \emptyset$ und $\sigma(T) = \{0\}$.

Integraloperatoren

Sei X eine Menge und μ ein Maß auf X. Hat man eine Funktion $k : X \times X \to \mathbb{C}$, so kann man die Abbildung K betrachten, die definiert ist als

$$(Kf)(x) := \int_X k(x, y) f(y)\, d\mu(y) .$$

Man bezeichnet K als den Integraloperator mit Kern k.

Natürlich ist von vornherein nicht klar für welche Funktionen f das Integral in der Definition von K überhaupt existiert. Dementsprechend ergeben sich verschiedene Ergebnisse, je nachdem welche Voraussetzungen man an k stellt und zwischen welchen Räumen man den Operator K betrachtet.

55. Sei X eine Menge und μ ein σ-endliches Maß auf X. Weiters sei $k \in L^2(\mu \times \mu)$. Zeige, dass der Integraloperator K mit Kern k auf ganz $L^2(\mu)$ definiert ist, diesen Raum in sich selbst abbildet, und dass $\|K\| \leq \|k\|_{L^2(\mu\times\mu)}$. Zeige, dass die Hilbertraumadjungierte $K^* \in \mathcal{B}(L^2(\mu))$ von K der Integraloperator mit Kern $k^*(x, y) := \overline{k(y, x)}$ ist.

56. Sei X eine Menge und μ ein σ-endliches Maß auf X. Zeige:

(a) Seien $a_i, b_i \in L^2(\mu)$, $i = 1, \dots, n$. Setze $k(s,t) := \sum_{i=1}^n a_i(s)b_i(t)$ und betrachte den Integraloperator $K \in \mathcal{B}(L^2(\mu))$ mit Kern k. Dann ist $\dim \operatorname{ran} K \leq n$.

(b) Sei $k \in L^2(\mu \times \mu)$. Dann ist der Integraloperator $K \in \mathcal{B}(L^2(\mu))$ mit Kern k kompakt.

57. Sei $k \in C([0,1]^2)$. Zeige, dass der Integraloperator K mit Kern k auf ganz $C([0,1])$ definiert ist, diesen Raum in sich selbst abbildet, und kompakt ist. Zeige

$$\|K\| = \sup_{x \in [0,1]} \int_0^1 |k(x,t)| \, dt \leq \|k\|_{C([0,1]^2)} .$$

58. Sei $k \in C([0,1]^2)$ gegeben, und betrachte den Integraloperator V mit Kern $\chi_{[0,x]}(t)k(x,t)$. Das ist also der Operator

$$(Vf)(x) := \int\limits_0^x k(x,t)f(t) \, dt .$$

Dieser Operator heißt der Volterra-Operator mit Kern k.

Zeige, dass V auf ganz $C([0,1])$ definiert ist, diesen Raum in sich selbst abbildet, und kompakt ist. Zeige $\|V\| = \sup_{x \in [0,1]} \int_0^x |k(x,t)| \, dt \leq \|k\|_{C([0,1]^2)}$ und $\sigma(V) = \{0\}$.

59. Sei X ein Banachraum, $T \in \mathcal{B}(X)$ injektiv, und sei $\lambda \in \rho(T)$, $\lambda \neq 0$. Setze $\mathcal{D} := \operatorname{ran} T$, und betrachte die lineare Abbildung $T^{-1} : \mathcal{D} \to X$. Zeige, dass (hier bezeichnet graph den Graphen der Abbildung)

$$(x; y) \in \operatorname{graph}\big(T^{-1} - \frac{1}{\lambda}\big) \quad \Leftrightarrow \quad (y; x) \in \operatorname{graph}\big(-\lambda - \lambda^2 (T - \lambda)^{-1}\big)$$

60. Finde einen Hilbertraum H, einen dichten linearen Teilraum $\mathcal{D}$ von H, und eine lineare Abbildung $T : \mathcal{D} \to H$, sodass es für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ einen Operator $R_\lambda \in \mathcal{B}(H)$ gibt mit

$$(T - \lambda)R_\lambda = \mathrm{id}_H, \quad R_\lambda(T - \lambda) = \mathrm{id}_{\mathcal{D}} .$$

Hinweis: Suche T^{-1}.