

Übung zu Funktionalanalysis 1

1. Übung (20.3.2015)

1. Sei X ein Vektorraum (über \mathbb{C}) und $p : X \rightarrow [0, \infty)$. Es habe p die Eigenschaften

- (i) $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
(ii) $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$, $x \in X, \lambda \in \mathbb{C}$.

Zeige, dass p genau dann eine Norm ist, wenn die Menge

$$B(p, 1) := \{x \in X : p(x) \leq 1\}$$

konvex ist.

2. Sei X ein Vektorraum (über \mathbb{C}) und sei $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

- (A) Es existiert eine Norm $\|\cdot\|$ auf X mit $d(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in X$.
(B) Die Abbildung d ist eine Metrik mit den zusätzlichen Eigenschaften $d(x + z, y + z) = d(x, y)$, $x, y, z \in X$, und $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|d(x, y)$, $x, y \in X, \lambda \in \mathbb{C}$.

3. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $X \neq \{0\}$, und bezeichne \mathcal{T} die initiale Topologie auf X bezüglich der Abbildung $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$. Sei $x \in X$. Finde eine Umgebungsbasis von x . Zeige, dass \mathcal{T} verschieden von der Normtopologie ist.

4. Sei I überabzählbar und seien (X_i, \mathcal{T}_i) , $i \in I$, topologische Räume sodass keine der Topologien gleich der Klumpentopologie $\{\emptyset, X_i\}$ ist. Zeige, dass es keine Metrik auf dem Raum $X := \prod_{i \in I} X_i$ gibt welche die Produkttopologie \mathcal{T} auf X induziert.

Hinweis: Wähle einen Punkt $(x_i)_{i \in I} \in X$ sodass jedes x_i in einer nichttrivialen offenen Menge $O_i \subsetneq X_i$ liegt. Gäbe es eine Metrik die \mathcal{T} induziert, so hätte der Umgebungsfiler dieses Punktes eine abzählbare Basis. Daraus leite einen Widerspruch ab.

5. Es sei \mathcal{D}_K der Raum aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit Träger Teilmenge einer festen kompakten Teilmenge K von \mathbb{R} . Für $N \in \mathbb{N}$ und $\epsilon > 0$ sei $U_{N, \epsilon} := \{f \in \mathcal{D}_K : \max_{0 \leq i \leq N} |f^{(i)}(x)| < \epsilon\}$. Zeigen Sie dass die Mengen $f + U_{N, \epsilon}$, $f \in \mathcal{D}_K$, $N \in \mathbb{N}$, $\epsilon > 0$ Basis einer Topologie auf \mathcal{D}_K sind, mit der \mathcal{D}_K ein topologischer Vektorraum wird in dem alle Ableitungen $f \mapsto f^{(i)}$ stetig sind. Zeigen Sie, dass die so erzeugte Topologie nicht von einer Norm erzeugt wird.

6. Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Vektorraum, $A \subseteq X$, und \mathfrak{W} eine Nullumgebungsbasis von X . Dann gilt

$$\overline{A} = \bigcap_{W \in \mathfrak{W}} (A + W).$$

7. Sei X ein topologischer Vektorraum und $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ linear und nicht identisch Null. Dann ist für jede kreisförmige Menge $K \subseteq X$ auch $f(K) \subseteq \mathbb{C}$ kreisförmig, und für jede kreisförmige Menge $M \subseteq \mathbb{C}$ auch $f^{-1}(M) \subseteq X$ kreisförmig.

Weiters ist für jede offene Menge $O \subseteq X$ auch $f(O) \subseteq \mathbb{C}$ offen. Muss stets für jede offene Menge $M \subseteq \mathbb{C}$ auch $f^{-1}(M) \subseteq X$ offen sein?

8. Betrachte den normierten Raum ℓ^2 , und die Elemente

$$b := \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}, \quad e_n := (\delta_{kn})_{n \in \mathbb{N}},$$

wobei

$$\delta_{kn} := \begin{cases} 1 & , k = n \\ 0 & , k \neq n \end{cases}$$

Zeige, dass die Menge $\{b, e_1, e_2, \dots\}$ linear unabhängig in ℓ^2 ist. Zeige, dass jedes lineare Funktional $\phi : \ell^2 \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\phi(b) = 1, \quad \phi(e_n) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

unstetig ist. Gibt es ein solches lineares Funktional?

9. Sei X ein normierter Raum mit $\dim X = \infty$. Zeige, dass es ein unstetiges lineares Funktional auf X gibt. Sei X ein endlichdimensionaler topologischer Vektorraum. Gibt es ein unstetiges lineares Funktional auf X ?
10. Für $0 < p < 1$ betrachte den Raum $L^p(0, 1)$ aller (Äquivalenzklassen von) messbaren komplexwertigen Funktionen definiert auf $(0, 1)$, und definiere eine Abbildung durch

$$d_p(f, g) := \int_{(0,1)} |f(x) - g(x)|^p dx, \quad f, g \in L^p(0, 1).$$

- (a) Zeige, dass d_p eine Metrik auf $L^p(0, 1)$ ist. Ist diese Metrik von einer Norm induziert?
- (b) Ist $V \subseteq L^p(0, 1)$ Umgebung von 0, und ist V konvex, so folgt $V = L^p(0, 1)$.
- (c) Es keine, von der Nullabbildung verschiedene, stetige lineare Abbildung $f : L^p(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$.

Hinweis: Sei V konvexe Nullumgebung, $r > 0$, sodass $U_r(0) := \{g \in L^p(0, 1) : \Delta(g) < r\} \subseteq V$. Sei $f \in L^p(0, 1)$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $n^{p-1}\Delta(f) < r$, $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ mit $\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)|^p dt = n^{-1}\Delta(f)$ und setze $g_i(t) := nf(t)\mathbb{1}_{[x_{i-1}, x_i]}$, sodass $f = n^{-1}(g_1 + \dots + g_n)$.