Übung zu Funktionalanalysis 1
2. Übung (24. 4. 2015)

11. Sei $(X, (.,.)_X)$ ein linearer Raum mit positiv definitem Skalarprodukt, und $(\iota, (H, (.,.)_H))$ eine Hilbertraumvervollständigung von X. Bezeichne $\iota^* : H^* \to X^*$ die zu ι duale Abbildung. Zeige, dass
$$X' = \big\{\iota^*\big((., y)_H\big) : y \in H\big\}.$$

12. Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum, und erfülle $\|.\|$ die Parallelogrammregel. Zeige, dass es ein Skalarprodukt gibt welches die Norm $\|.\|$ induziert.

    Hinweis: Definiere eine Abbildung $(.,.) : X \times X \to \mathbb{C}$ so wie man es machen muss, und zeige schrittweise

    – $(x, x) = \|x\|^2$, $x \in X$, und $(x, y) = \overline{(y, x)}$, $x, y \in X$;
    – $(x + y, z) = 2(x, z/2) + 2(y, z/2)$, $x, y, z \in X$;
    – $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$, $x, y, z \in X$, und $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$, $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

13. Betrachte den Raum $\mathbb{C}_n[z]$ aller Polynome mit komplexen Koeffizienten mit Grad höchstens n. Zeige, dass $(p, q) := \int_{-1}^1 p(t)\overline{q(t)}\, dt$ ein positiv definites Skalarprodukt auf $\mathbb{C}_n[z]$ ist, und dass $(\mathbb{C}_n[z], (.,.))$ ein Hilbertraum ist. Zeige, dass es zu jedem $w \in \mathbb{C}$ und $l \in \mathbb{N}_0$ ein eindeutiges Element $K_{w;l} \in \mathbb{C}_n[z]$ gibt, sodas
$$p^{(l)}(w) = \int_{-1}^1 p(x)\overline{K_{w;l}(x)}\, dx, \quad p \in \mathbb{C}_n[z].$$

14. Betrachte wieder den Raum $\mathbb{C}_n[z]$ aller Polynome mit komplexen Koeffizienten mit Grad höchstens n versehen mit dem Skalarprodukt $(p, q) := \int_{-1}^1 p(t)\overline{q(t)}\, dt$, und sei $K_{w;l}$ jenes Element mit $p^{(l)}(w) = (p, K_{w;l})$, $p \in \mathbb{C}_n[z]$. Zeige, dass $K_{w;0}(z) = \overline{K_{z;0}(w)}$, $z, w \in \mathbb{C}$, und $K_{w;1} = K'_{w;0}$, $w \in \mathbb{C}$.

15. Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei
$$K := \big\{p \in \mathbb{C}_n[z] : \quad p \text{ hat reelle Koeffizienten, } p''(x + 2) \geq p'(x - 2), x \in [0, 1], \ \big\}.$$
    Zeige, dass es zu jeder Funktion $f \in L^2([-1, 1])$ genau ein Polynom $p_0 \in K$ gibt, sodass
$$\int_{-1}^1 |f(t) - p_0(t)|^2\, dt \leq \int_{-1}^1 |f(t) - p(t)|^2\, dt, \quad p \in K.$$
    Hinweis: Zeige dass K abgeschlossen und konvex ist.

16. Sei μ das normierte Lebesguemaß $d\mu = \frac{1}{2\pi}dx$. Betrachte die Elemente bzw. Teilräume im $L^2([0, 2\pi), \mu)$ die definert sind als
$$e_n(t) := e^{int},\ n \in \mathbb{Z}, \qquad u_n(t) := \frac{e_{-n}(t) + ne_n(t)}{\sqrt{1 + n^2}},\ n \in \mathbb{N},$$
$$M := \overline{\operatorname{span}\{e_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}}, \quad N := \overline{\operatorname{span}\{u_n : n = 1, 2, \ldots\}}.$$
    Zeige die folgenden Aussagen.

    (a) Die Räume M und N sind, versehen mit dem $L^2(\mu)$–Skalarprodukt, Hilberträume. Die Mengen $\{e_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ bzw. $\{u_n : n = 1, 2, \ldots\}$ sind Orthonormalbasen von M bzw. N.
    (b) $M \cap N = \{0\}$.
    (c) $M \dot{+} N$ ist dicht in $L^2([0, 2\pi), \mu)$, aber nicht gleich ganz $L^2([0, 2\pi), \mu)$.
    (d) Die Projektion des normierten Raumes $X := M \dot{+} N$ mit Bild M und Kern N ist nicht stetig.

17. Zeige dass das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren im Raum $L^2(-1,1)$ ausgehend von der Folge $(x^n)_{n=0}^{\infty}$ eine Orthonormalbasis $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ liefert, und gegeben ist als $b_n = \sqrt{n+\frac{1}{2}}P_n$ wobei P_n das n-te Legendre Polynom

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$$

ist.

18. Sei μ das normierte Lebesguemaß $d\mu = \frac{1}{2\pi}dx$, sei A eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{Z}$, und setze

$$H(A) := \Big\{ f \in L^2([0,2\pi),\mu) : \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = 0, n \in A \Big\}.$$

Zeige, dass $H(A)$ ein abgeschlossener Teilraum von $L^2(0,2\pi)$ ist, und finde eine Orthonormalbasis des Hilbertraumes $H(A)$.

Bestimme das orthogonale Komplement von $H(A)$, und finde eine explizite Formel für die orthogonale Projektion von $L^2([0,2\pi),\mu)$ auf $H(A)$.

19. Ein Hilbertraum heißt H *separabel*, wenn er eine abzählbare und dichte Teilmenge besitzt. Zeige, dass für einen Hilbertraum H die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (i) H ist separabel.

   (ii) H hat eine eine höchstens abzählbare Orthonormalbasis.

   (iii) Es gibt eine höchstens abzählbare Teilmenge N von H sodass die lineare Hülle $\operatorname{span} N$ dicht in H ist.

20. Sei $(H,(\cdot,\cdot)_H)$ ein Hilbertraum, und $[\cdot,\cdot]$ ein weiteres Skalarpodukt auf H. Sei vorausgesetzt dass $[\cdot,\cdot]$ eine stetige koerzive Sesquilinearform ist, d.h., dass (hier bezeichnet $\|.\|_H$ die von $(\cdot,\cdot)_H$ induzierte Norm)

$$\exists C > 0\,\forall x,y \in H:\ |[x,y]| \le C\|x\|_H\|y\|_H, \qquad \exists m > 0\,\forall x \in H:\ [x,x] \ge m\|x\|_H^2.$$

Weiters bezeichne G den Gram-Operator der Sesquilinearform $[\cdot,\cdot]$ bzgl. $(\cdot,\cdot)_H$.

Zeige, dass es einen eindeutigen Operator $T \in \mathcal{B}(H)$ gibt, sodass $GT = TG = \mathrm{id}_H$ gilt.

Hinweis: Zeige, dass $(H,[\cdot,\cdot])$ ein Hilbertraum ist.