# Übung zu Funktionalanalysis 1

# 7. Übung (19. 6. 2015)

58. Sei $k \in C([0,1]^2)$. Zeige, dass der Integraloperator $K$ mit Kern $k$ auf ganz $C([0,1])$ definiert ist, diesen Raum in sich selbst abbildet, und kompakt ist. Zeige

$$\|K\| = \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |k(x,t)|\,dt \leq \|k\|_{C([0,1]^2)}\,.$$

59. Sei $k \in C([0,1]^2)$ gegeben, und betrachte den Integraloperator $V$ mit Kern $\chi_{[0,x]}(t)k(x,t)$. Das ist also der Operator

$$(Vf)(x) := \int\limits_0^x k(x,t)f(t)\,dt\,.$$

Dieser Operator heißt der Volterra-Operator mit Kern $k$.

Zeige, dass $V$ auf ganz $C([0,1])$ definiert ist, diesen Raum in sich selbst abbildet, und kompakt ist. Zeige $\|V\| = \sup_{x\in[0,1]} \int_0^x |k(x,t)|\,dt \leq \|k\|_{C([0,1]^2)}$ und $\sigma(V) = \{0\}$.

60. Sei $X$ ein Banachraum, $T \in \mathcal{B}(X)$ injektiv, und sei $\lambda \in \rho(T)$, $\lambda \neq 0$. Setze $\mathcal{D} := \operatorname{ran} T$, und betrachte die lineare Abbildung $T^{-1} : \mathcal{D} \to X$. Zeige, dass (hier bezeichnet graph den Graphen der Abbildung)

$$(x;y) \in \operatorname{graph}\big(T^{-1} - \frac{1}{\lambda}\big) \quad \Leftrightarrow \quad (y;x) \in \operatorname{graph}\big(-\lambda - \lambda^2(T-\lambda)^{-1}\big)$$

61. Finde einen Hilbertraum $H$, einen dichten linearen Teilraum $\mathcal{D}$ von $H$, und eine lineare Abbildung $T : \mathcal{D} \to H$, sodass es für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ einen Operator $R_\lambda \in \mathcal{B}(H)$ gibt mit

$$(T-\lambda)R_\lambda = \mathrm{id}_H, \quad R_\lambda(T-\lambda) = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}\,.$$

Hinweis: Suche $T^{-1}$.

62. Sei $A$ ein beschränkter selbstadjungierter Operator in einem Hilbertraum $H$, sei $E$ sein Spektralmaß, und definiere $E_\lambda : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(H)$ als $E_\lambda := E(\sigma(A) \cap (-\infty, \lambda])$.

Sei $\phi \in C([\gamma_-(A), \gamma_+(A)])$. Zeige, dass der Limes (das Riemann-Stieltjes Integral)

$$\int_{\gamma_-(A)-}^{\gamma_+(A)} \phi(t)\,dE_\lambda(t) := \lim_{|\mathcal{R}|\to 0} \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} \phi(\alpha_j)\big(E_{\xi_j} - E_{\xi_{j-1}}\big),$$

wobei die Riemannzerlegung $\mathcal{R}$ die Stützstellen $\xi_j$ und die Zwischenstellen $\alpha_j$ hat, bezüglich der Operatornorm existiert und gleich der (wie in der Vorlesung definierte) Operator $\int(\phi|_{\sigma(A)})\,dE$ ist.

In vielen Büchern wird $\Phi_E(\phi)$ in dieser –mehr zur klassischen Analysis hin orientierten– Weise eingeführt. Die Funktion $E_\lambda$ is die Verteilungsfunktion des Spektralmaßes $E$.

63. Sei $P$ eine orthogonale Projektion in einem Hilbertraum $H$. Bestimme alle Teile des Spektrums von $P$ ($\sigma(P), \sigma_p(P), \sigma_c(P), \sigma_r(P), \sigma_{app}(P)$). Berechne das zu $P$ gehörige Spektralmaß $E : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(H)$.

64. Sei $k \in C([0,1]^2)$ und $K \in \mathcal{B}(L^2(0,1))$ der Integraloperator mit Kern $k$. Sei weiters $k(s,t) = \overline{k(t,s)}$, sodass $K$ selbstadjungiert ist. Schließlich sei

$$K = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n(\cdot, e_n)e_n$$

die Spektralzerlegung von $K$. Zeige:

(a) Die Eigenfunktionen $e_n$ sind stetig auf $[0,1]$.

(b) Für jedes $f \in L^2(0,1)$ konvergiert die Reihe $Kf = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n (f, e_n) e_n$ absolut und gleichmäßig auf $[0,1]$.

65. Sei $H$ ein Hilbertraum. Bezeichne

$$\mathcal{R} := \left\{ T \in \mathcal{B}(H) : \, \dim \operatorname{ran} T < \infty \right\}.$$

Zeige, dass die Menge aller kompakten Operatoren der Abschluß von $\mathcal{R}$ in der Operatornorm ist.