

Übung 10

Aufgabe 1. Wir verwenden Aufgabe 1. von Übung 8. Füttern Sie Ihren Code mit verschiedenen Geometrien (L-förmig, Z-förmig) und beobachten Sie die Konvergenz des Energiefehlers. Welche Raten stellen sich für verschiedene Geometrien ein?

Aufgabe 2. Wir betrachten ein 2d-Problem mit inhomogenen Dirichletdaten:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ u|_{\Gamma} &= g. \end{aligned}$$

Um dieses Problem mit der FE-Methode zu lösen geht man vor wie in 1D. Zu einem Gitter \mathcal{T}_ℓ wählt man $u_D \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell)$ mit $u_D|_{\Gamma} = I_\ell g$, wobei I_ℓ der nodale Interpolationsoperator in den Gitterpunkten sei (wir nehmen an, dass g glatt genug ist). Dann löst $u_0 = u - u_D$ die zugehörige Finite-Element Formulierung mit rechter Seite $F(v) - \int_{\Omega} \nabla u_D \nabla v dx$.

Verwenden Sie zum Verfeinern die Routine `refine.m`, und markieren Sie den ganzen Rand als Dirichletrand. Wenn sie beim Assemblieren durch die Elemente laufen, prüfen Sie, ob ein Element am Rand liegt. Nutzen Sie aus, dass Sie die Einträge $\int_T \nabla u_D \nabla \varphi_i dx$ bis auf eine Konstante schon berechnet haben. Hier ist φ_i eine Hutfunktion zu einem Knoten i des Elements T .

Visualisieren Sie die Lösung und plotten Sie den Energiefehler (siehe Übung 8).

Aufgabe 3. Betrachten Sie das gemischte Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= g && \text{auf } \Gamma_D \\ \partial_n u &= \phi && \text{auf } \Gamma_N. \end{aligned}$$

Hier ist $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ und $\overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N} = \Gamma$. Wie lautet die schwache Formulierung? (Hinweis: Übung 6, Aufgabe 2.) Implementieren Sie eine FE-Methode für dieses Problem. Die Routine `refine.m` kann auch mit mehreren Randstücken arbeiten.