# Übungen zu Analysis 3, 3. Übung

1. Zeigen Sie, dass $f(G) \subseteq \mathbb{C}$ offen ist, wenn $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$ ist.

2. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch
$$f\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi+\eta+\zeta\\ \xi\eta+\xi\zeta+\eta\zeta\\ \xi\eta\zeta\end{pmatrix}$$
Zeigen Sie, dass $f$ im Sinne des Umkehrsatzes bei $(x,y,z)^T$ genau dann lokal umkehrbar ist, wenn $(x-y)(y-z)(z-x) \neq 0$. Geben Sie in dem Fall auch die Ableitung der Umkehrfunktion im Punkt $f(x,y,z)^T$ an!

3. Man untersuche bei den folgenden zwei Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, auf welchen möglichst großen, offenen Teilmengen $C$ von $\mathbb{R}^2$ diese einen Diffeomorphismus darstellen. Man gebe zu jedem solchen $C$ auch die Bildmenge $D$ an!
$$f\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x^2-y^2\\ 2xy\end{pmatrix}, \quad g\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^x\cos y\\ e^x\sin y\end{pmatrix}.$$
Weiters gebe man $df(x)$ bzw. $dg(x)$, sowie die Funktionaldeterminanten $\det df(x)$ bzw. $\det dg(x)$ an.

   Dabei ist $f : C \to D$ ein Diffeomorphismus, wenn $f$ bijektiv ist, $C, D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : C \to \mathbb{R}^n$ sowie $g : D \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar sind.

   Hinweis: Nach dem Umkehrsatz bzw. seinem Korollar ist ein injektives und stetig differenzierbares $f : C \to \mathbb{R}^n$ mit $\det df(c) \neq 0$ für alle $c \in C$ immer ein Diffeomorphismus auf sein Bild $f(C)$.

   Aus der Kettenregel folgt umgekehrt für einen Diffeomorphismus die Invertierbarkeit aller $df(c)$.

4. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ die Menge aller $(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3$ mit (Affensattel)
$$3z + 3xy^2 - x^3 = 0.$$
Zeigen Sie, dass $M$ eine Mannigfaltigkeit ist! Bestimmen Sie ihre Dimension!

5. Sei $M$ eine $d$-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$, und sei $O \subseteq M$ offen bzgl. der Spurtopologie. Man zeige, dass $O$ ebenfalls eine $d$-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$ ist.

   Weiters zeige man: Ist $T : O \to P$ ein Diffeomorphismus mit offenen Teilmengen $O, P \subseteq \mathbb{R}^p$, und ist $M$ eine $d$-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$, sodass $M \subseteq O$, so ist auch $T(M)$ eine $d$-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$.

6. Man zeige: Ist $M_i, i \in I$, eine Familie von $d$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^p$, sodass für jedes $j \in I$, $M_j \cap \overline{\bigcup_{i\neq j} M_i} = \emptyset$, so ist $\bigcup_{i\in I} M_i$ eine Mannigfaltigkeit.

Schließlich gebe man ein Beispiel an, das zeigt, dass obige Voraussetzung notwendig ist; d.h. finden Sie zwei 1-dimensionale Mannigfaltigkeiten $M_1, M_2$ im $\mathbb{R}^2$, die zwar disjunkt sind, aber nicht $\overline{M_1} \cap M_2 = \emptyset$ erfüllen, und sodass $M_1 \cup M_2$ keine Mannigfaltigkeit ist.

7. Man betrachte den Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aller reellen $2 \times 2$-Matrizen, welchen man offensichtlich mit dem $\mathbb{R}^4$ identifizieren kann, indem man eine Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit dem vier-Vektor $(a_1, a_2, a_3, a_4)^T \in \mathbb{R}^4$ identifiziert. Betrachte

$$O(2) = \left\{ T \in \mathbb{R}^{2\times 2} : T \text{ ist eine orthogonale Matrix } \right\} .$$

   Man zeige, dass $O(2)$ eine Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^4$ ist. Bestimmen Sie die Dimension von $O(2)$.

8. Mit der Notation aus dem letzten Beispiel gebe man irgendeine Einbettung nach $O(2)$ hinein an, die $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in ihrem Bild hat.

   Schließlich gebe an, ob $O(2)$ eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^4$ ist.

   Hinweis für das zweite Problem: Betrachten sie $\det : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$! Welche Werte kann det auf $O(2)$ annehmen?

9. Sei $T : O \to \mathbb{R}^p$ eine injektive stetig differenzierbare Abbildung mit und $O \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, sodass $dT(x)$ immer vollen Rang hat.

   Sei $G \subseteq O$ offen und beschränkt, sodass $\overline{G} \subseteq O$. Man zeige, dass $M := T(G)$ eine $d$-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

   Hinweis: Man zeige zuerst, dass $T : \overline{G} \to T(\overline{G})$ ein Homöomorphismus ist.

   Bemerkung: Das Bild $T(O)$ ist i.A. keine Mannigfaltigkeit. Um das einzusehen, denke man an das Aussehen der Ziffer 6 als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Diese kann Bild eines offenen Intervalls $(a, b)$ unter einer Abbildung $T$ wie oben geschrieben werden.