Übungen zu Analysis 3, 5. Übung

1. Seien $a, b, c > 0$ und $K = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1\}$. Bestimmen Sie das Maximum der Volumina von in K enthaltenen Quadren mit achsenparallelen Kanten.

2. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, und sei $B : D \to \mathbb{C}$ analytisch mit $B'(z) \neq 0$, $\forall z \in D$. Man zeige, dass für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$ die Menge $\{z \in D : \operatorname{Re} B(z) = c\}$ eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{C}$ ist.

3. Seien $x_1, \ldots, x_n$ Winkeln mit $x_j \in (0, 2\pi)$, sodass $x_1 + \cdots + x_n = 2\pi$. Ist nun $P_j = e^{i \sum_{l=1}^{j-1} x_l}$, $j = 1, \ldots, n$ (i ist die imaginäre Konstante), so stellt $\overrightarrow{P_1 P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_{n-1} P_n}, \overrightarrow{P_n P_1}$ ein n-Eck dar.

   Man bestimme die Winkel x_j so, dass der Flächeninhalt dieses n-Eckes maximal ist. Man verwende dabei die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren!

4. Weisen Sie nach, dass $\partial^s O$ tatsächlich eine $p-1$ dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

5. Sei $O \subseteq \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$O = \Big((U_2^{(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)}(0) \cap \{(x, y, z)^T : z \geq 0\}) \cup \{(x, y, z-2)^T : z^2 > x^2 + y^2,\ z \in (0, 2)\} \Big) \setminus K_1^{(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)}(0) .$$

   Geben Sie eine Skizze an! Zeigen Sie, dass O offen ist und bestimmen Sie den topologischen Rand $\partial O = \overline{O} \setminus O^\circ$ sowie $\partial^s O$ und $\partial^o O$.

   Schließlich bestimme man die Normalen von M in den Punkten $(1, 1, \sqrt{2})^T$, $(1, 1, -\sqrt{2})^T$ sowie $\frac{1}{2}(1, 1, \sqrt{2})^T$ allen $(x, y, z)^T \in M$ mit $z = -1$.

6. Betrachte die Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, die definiert ist als

$$\phi((t, \alpha)^T) := \Big((1 + t \cos \frac{\alpha}{2}) \cos \alpha, (1 + t \cos \frac{\alpha}{2}) \sin \alpha, t \sin \frac{\alpha}{2} \Big)^T .$$

   Setze $M := \phi((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times \mathbb{R})$. Zeige, dass für jedes Intervall (a, b) der Länge $\leq 2\pi$ die Einschränkung $\phi|_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (a,b)}$ eine Einbettung in M ist, und dass die Menge M eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Diese Mannigfaltigkeit heißt auch das Möbiusband.

   Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $M = \phi([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [0, 2\pi]) \setminus \phi(\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\} \times [0, 2\pi])$ offen in $\phi([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [0, 2\pi])$ ist. Nun zeige man, dass für $|b - a| < 2\pi$ $\phi : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [a, b] \to \phi([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [a, b])$ ein Homöomorphismus ist, und damit dann dass $\phi : (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (a, b) \to \phi((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (a, b))$ auch ein Homöomorphismus ist, wobei die Menge $\phi((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (a, b))$ in M offen ist.

7. Sei $O \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $F : O \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, sodass $dF(x) \neq 0$ für alle $x \in M$, wobei $M = \{x \in O : F(x) = 0\}$.

   Gibt es auf M eine überall definierte, stetige Normalenfunktion? Zeigen Sie zunächst, dass $G := \{x \in O : F(x) > 0\}$ und $H := \{x \in O : F(x) < 0\}$ offene Teilmengen von $\mathbb{R}^p$ sind.

   Zeigen Sie nun, dass es für $x \in M$ beliebig nahe an x Punkte aus $G := \{x \in O : F(x) > 0\}$ und Punkte aus $H := \{x \in O : F(x) < 0\}$ gibt, dh. x ist im Abschluss von G und von H.

   Schließlich zeige man, dass $\partial G \cap O = M$ und weiter dass $\partial^s G \cap O = \partial^o G \cap O = M$.

   Hinweis: Was würde zB. aus $U_\epsilon^{\mathbb{R}^p}(x) \subseteq \{x \in O : F(x) \leq 0\}$ mit $F(x) = 0$ für $dF(x)$ folgen?

8. Sei M eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$. Zeigen Sie, dass M genau dann zusammenhängend ist, wenn es zu allen $x, y \in M$ ein Intervall $[a, b]$ und eine stetige Abbildung $f : [a, b] \to M$ gibt, sodass $f(a) = x$ und $f(b) = y$.

9. Sei M eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$, welche durch eine einzige Einbettung $\phi : D \to M$ beschrieben wird, wobei ϕ aus C^2 ist. Zeigen Sie, dass für $t(s) := \frac{1}{\|\phi'(s)\|_2}\phi'(s)$ immer $t'(s)$ auf $t(s)$ normal steht.

   Zeigen Sie auch, dass für $p = 3$ und niemals verschwindendes $t'(s)$ die Vektoren $t(s), n(s), b(s)$ (begleitendes Dreibein) eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bilden, wobei $n(s) = \frac{1}{\|t'(s)\|_2}t'(s)$ und $b(s) = t(s) \times n(s)$ (Kreuzprodukt).