Übungen zu Analysis 3, 11. Übung

1. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $p \in [1, +\infty]$ und $d \in \mathbb{N}$. Mit $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}^d)$ bezeichnen wir alle komponentenweise messbaren und sogar komponentenweise integrierbare Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$. Zeigen Sie, dass $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}^d)$ versehen mit
$$\|f\| := (\int_{\mathbb{R}^p} \|f(x)\|_p^p \, d\mu(x))^{\frac{1}{p}}$$
ein Banachraum ist. $\|.\|_p$ ist hier die entsprechende Norm auf $\mathbb{R}^p$.

   Zeigen Sie auch, dass für $p \in [1 + \infty)$, wobei im Fall $p = 1$ das Maß als σ-endlich vorauszusetzen ist, der Dualraum $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}^d)$ isometrisch isomorph zu $L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}^d)$ ist, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

   Hinweis: Betrachte $L^p(\Omega \times \{1, \dots, d\}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{P}(\{1, \dots, d\}), \mu \otimes \xi, \mathbb{R})$, wobei $\mathcal{P}(\{1, \dots, d\})$ die Potenzmenge auf $\{1, \dots, d\}$ bezeichnet und wobei ξ das Zählmaß darauf ist.

2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie, dass für $p, q \in [1, +\infty)$ die Menge $L^p \cap L^q$ dicht in L^p bzgl. $\|.\|_p$ ist.

   Ist weiters $\mu(\Omega) < +\infty$, so weise man nach, dass $L^p \subseteq L^q$ für $p, q \in [1, +\infty]$, $p \geq q$.

   Schließlich gebe man einen Maßraum an, wo $L^p \supseteq L^q$ für $p, q \in [1, +\infty]$, $p \geq q$.

   Hinweis: ℓ^p.

3. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorffraum und seien $\mathfrak{B}$ alle Borelteilmengen von X, dh. $\mathfrak{B} = A_\sigma(\mathcal{T})$. Weiters sei $\mu : \mathfrak{B} \to [0, +\infty]$ ein Borelmaß, dh. ein Maß mit $\mu(K) < +\infty$ für alle kompakten $K \subseteq X$, sodass μ bei allen $A \in \mathfrak{B}$ mit $\mu(A) < +\infty$ von innen regular ist, dh. dass $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A, K \text{ kompakt}\}$.

   Zeigen Sie, dass dann die Menge aller Treppenfunktionen der Bauart $\sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot \mathbb{1}_{K_j}$, wobei die K_j kompakt sind, dicht in $L^p(X, \mathfrak{B}, \mu)$ ist.

4. Zeigen Sie, dass Korollar 17.2.7 auch richtig ist, wenn $\lambda_d|_{\mathfrak{B}_d \cap G}$ durch ein beliebiges Borelmaß auf $\mathfrak{B}_d \cap G$ ersetzt wird, welches bei allen $A \in \mathfrak{B}_d \cap G$ mit $\mu(A) < +\infty$ regular ist, dh. $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A, K \text{ kompakt}\}$ sowie $\mu(A) = \inf\{\mu(O) : G \supseteq O \supseteq A, O \text{ offen}\}$.

   Hinweis: Vorheriges Beispiel und Bemerkung 15.4.6.

   Bemerkung: Das Lebesguesche Maß ist bei allen Borelteilmengen von G regulär.

5. Zeigen Sie, dass die Menge aller Trigonometrischen Polynome, also Funktionen der Bauart $f(t) = \sum_{j=-N}^N c_j \exp(itj)$, dicht in $L^p((-\pi, \pi), \lambda)$ für jedes $p \in [1, +\infty)$ ist!

6. Zeigen Sie, dass die Fourierkoeffizienten $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(t)\ \exp(-itn),\ n \in \mathbb{Z}$ einer Funktion $f \in L^p((-\pi,\pi),\lambda)$ $(p > 1)$ diese eindeutig bestimmt, dh. dass aus $\hat{f}(n) = \hat{g}(n),\ n \in \mathbb{Z}$ mit $f, g \in L^p$ folgt, dass $f = g$.

   Bemerkung: Die Aussage gilt auch für $p = 1$.

7. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $p \in [1, +\infty)$. Weiters sei $\phi \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass

$$M : f \mapsto \phi \cdot f,$$

   ein beschränkter, linearer Operator von L^p in sich ist, wobei die Abbildungsnorm $\|M\|$ von M kleiner oder gleich $\|\phi\|_\infty$ ist.

   Man zeige auch, dass im Falle eines σ-endlichen μ sogar $\|M\| = \|\phi\|_\infty$.

   Hinweis: Um $\|M\| \geq \|\phi\|_\infty$ zu zeigen, betrachte man für ein beliebiges $\epsilon > 0$ die Charakteristische Funktion einer Teilmenge von $\{x \in \Omega : |\phi(x)| > \|\phi\|_\infty - \epsilon\}$ mit endlichem, nicht verschwindenden Maß. Warum gibt es eine solche?

8. Sei $f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x$. Man entwickle f in eine Fourierreihe!

9. Sei $f(x)$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte, komplexwertige, messbare Funktion. Wir nehmen an, dass 2π-periodisch ist. Das bedeutet: $f(x) = f(x + 2\pi)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Weiters beweise man, dass für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ folgende Gleichheit gilt:

$$\int_{[-\pi,\pi]} f\ d\lambda = \int_{[0,2\pi]} f\ d\lambda = \int_{[\alpha,\alpha+2\pi]} f\ d\lambda$$

   in dem Sinne, dass wenn eines dieser Integrale existiert, dann auch die beiden anderen existieren, und dass eben besagte Gleichheit gilt. Weiters zeige man, dass für ungerade $(g(-x) = -g(x))$ integrierbare Funktionen $g : [-b, b] \to \mathbb{C}$ immer $\int_{[-b,b]} f\ d\lambda = 0$, und dass für gerade $(g(-x) = g(x))$ integrierbare Funktionen $g : [-b, b] \to \mathbb{C}$ immer $\int_{[-b,b]} f\ d\lambda = 2\int_{[0,b]} f\ d\lambda$.

   Hinweis: Man setze dazu die Funktion (eingeschränkt auf $(0, \pi]$) auf $[-\pi, \pi]$ zu einer ungeraden Funktion fort.

10. Man entwickle $f(x) = \frac{1}{2-e^{ix}}, x\ \in [-\pi, \pi]$ in eine Fourierreihe. Konvergiert diese punktweise oder gar gleichmäßig und wogegen?

    Hinweis: Geometrische Reihe!