Übungen zu Analysis 3, 13. Übung

1. Zeigen Sie mit Hilfe des Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt aus der Linearen Algebnra, dass es in $L^2(\mathbb{R})$ versehen mit $(f,g) = \int_{\mathbb{R}} f\bar{g}\, d\lambda$ ein ONS $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, sodass für alle $N \in \mathbb{N}$ die lineare Hülle von $e_1, \dots, e_N$ mit

   $$\{t \mapsto p(t)e^{-t^2} : p \in \mathbb{C}[z] \;\text{ mit Grad }\; < N\}$$

   als Teilraum von $L^2(\mathbb{R})$ übereinstimmt.

   Zeigen Sie auch, dass $\{t \mapsto p(t)e^{-t^2} : p(z) \in \mathbb{C}[z]\}$ dicht in $L^2(\mathbb{R})$ ist!

   Hinweis: Gehen Sie gemäß der ersten Aufgabe von Übung 13 vor. Verwenden Sie auch die Überlegungen aus Beispiel 5 und 6 der siebten Übung um aus $\int f(t)t^n \exp(-t^2)\, d\lambda(t) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ darauf zu schließen, dass $F(z) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \exp(zt - t^2)\, d\lambda(t)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ verschwindet! Was folgt daraus für $z = -ix$?

2. Man berechne die Fouriertransformierte von $f(x) = \mathbb{1}_{[-a,a]}(x)$ und von $f(x) = \operatorname{sgn}(x)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$, und bestimme ob $\hat{f} \in L_1$ und/oder $\hat{f} \in L_2$.

3. Bestimmen Sie die Fouriertranformierte von $\frac{\sin x}{x}$ und von $\frac{\cos x - 1}{x}$. Beachten Sie dabei, dass diese Funktion nicht integrierbar sind, aber dass sie in L_2 liegen. Also ist die Fouriertranformierte im Sinne der Vorlesung als Fortsetzung U der Fouriertranformierten auf L^2 zu versetehen.

4. Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ stetig so, dass $f|_{\mathbb{R}\setminus M}$ stetig differenzierbar ist, wobei $M \subseteq \mathbb{R}$ endlich ist. Sei $g := f'$ auf $\mathbb{R} \setminus M$, und sei g irgendwie auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt. Wir nehmen an, dass $g \in L^1(\mathbb{R})$.

   Zeigen Sie, dass dann $\lim_{|t|\to+\infty} f(t) = 0$ und $\hat{g}(\zeta) = i\zeta\hat{f}(\zeta)$. (Verallgemeinerung der entsprechenden Tatsache aus der Vorlesung)

   Mit Hilfe dieser Tatsache bestimme man schließlich, welche Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ aus L^1 als Fouriertransformierte $\hat{f}(y) = \dfrac{4y}{3 + 2y + y^2}$ hat.

5. Man berechne $\sigma(f)$ und $\mathcal{L}_c(f)(z)$ für $f(t) = t^n$ und für $f(t) = t^n e^{wt}$ mit $w \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$.

6. Man zeige: $\mathcal{L}_c(f(.-a)\mathbb{1}_{[0,+\infty)(.-a)})(z) = e^{-az}\mathcal{L}_c(f)(z)$, wenn $a > 0$, und $\mathcal{L}_c(g)(z) = \mathcal{L}_c(f)(z - b)$, $\sigma(g) = \sigma(f) + \operatorname{Re} b$, wobei $g(t) = f(t)\exp(tb)$.

7. Man berechne $\sigma(f)$ und $\mathcal{L}_c(f)(z)$ für $f(t) = \sin wt$ sowie für $f(t) = \cos wt$ wobei $w \in \mathbb{C}$.

8. Sei $f \in C^k[0, +\infty)$. Zeigen Sie, dass für $\operatorname{Re} z > \max_{j=0,\dots,k} \sigma(f^{(j)})$

   $$\mathcal{L}_c(f^{(k)})(z) = z^k\mathcal{L}_c(f)(z) - \sum_{j=0}^{k-1} f^{(j)}(0) z^{k-1-j}.$$

Bemerkung: Dieser Sachverhalt kann dazu verwenet werden, um Differentialgleichungen zu lösen. Erfüllt nämlich $f \in C^k[0, +\infty)$ eine Differentialgleichung der Form

$$af'' + bf' + cf = g, \ f(0) = d_1, f'(0) = d_2,$$

für Konstante $a, b, c, d_1, d_2 \in \mathbb{C}$ und einer Laplace-transformierbaren Funktion g, so folgt ($\operatorname{Re} z$ hinreichend groß)

$$a(z^2\mathcal{L}_c(f)(z) - zf(0) - f'(0)) + b(z\mathcal{L}_c(f)(z) - f(0)) + c\mathcal{L}_c(f)(z) =$$

$$a\mathcal{L}_c(f'')(z) + b\mathcal{L}_c(f')(z) + c\mathcal{L}_c(f)(z) = \mathcal{L}_c(g)(z).$$

Somit folgt

$$\mathcal{L}_c(f)(z) = \frac{\mathcal{L}_c(g)(z) + ad_1z + ad_2 + bd_1}{az^2 + bz + c}.$$

Um f zu erhalten, muss man nur noch die Inverse Laplace Transformierte der rechten Seite suchen, d.h. eine Funktion, deren Laplace Transformierte genau die rechte Seite ist. Sollte die rechte Seite eine rationale Funktion sein, so wendet man komplexe Partialbruchzerlegung an, um die Inverse Laplace Transformierte leichter zu finden. In der Praxis verwendet man Transformationstabellen.

Auch Gleichungen höherer Ordnung lassen sich so behandeln.

9. Lösen Sie mit Hilfe der Laplace Transformierten folgende Differentialgleichung:
$$f''(t) + 4f'(t) = \cos 2t, \quad f(0) = 0, f'(0) = 1.$$