Übungen zu Analysis 3, 2. Übung 14. 10. 2013

Zeigen Sie:

1. Ist f eine Abbildung von X nach Y und $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf X, so ist $f(\mathcal{U}) := \{f(F).\ F \in \mathcal{U}\}$ Filterbasis eines Ultrafilters in Y.

2. Ein Banachlimes auf ℓ^∞ ist eine lineare Abbildung $\Lambda:\ \ell^\infty \to \mathbb{R}$, die translationsinvariant ist, d.h. wenn $\tau : \ell^\infty \to \ell^\infty$, $\tau f(n) = f(n+1)$ den Translationsoperator bezeichnet $\Lambda(\tau f) = \Lambda f$ erfüllt und den Abschätzungen $\liminf f \leq \Lambda f \limsup f$ für alle $f \in \ell^\infty$ genügt.

   Sei T der lineare Operator $\ell^\infty \to \ell^\infty$, $Tf(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(i)$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} Tf(n) - T(\tau f)(n) = 0$ gilt.

   Zeigen Sie, dass für jeden Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf $\mathbb{N}$, der die Mengen $\{i \in \mathbb{N}:\ i \geq n_0\}$, $n_0 \in \mathbb{N}$ enthält die Mengen $(f(U))_{\ U\in\mathcal{U}}$ Filterbasis eines Ultrafilters sind, der in $[\inf f, \sup f]$ gegen einen Wert (genannt $\mathcal{U}$-limes von f i,Z. $\mathcal{U} - \lim f$) mit $\liminf f \leq \mathcal{U} - \lim f \leq \limsup f$ konvergiert.

   Zeigen Sie, dass für jeden solchen Ultrafilter $\mathcal{U}$ durch $\mathcal{U} - \lim Tf$ ein Banachlimes definiert wird.

   (Hinw. vorheriges Beispiel)

3. Auf der Menge $\beta\mathbb{N}$ aller Ultrafilter auf $\mathbb{N}$ bilden die Mengen $\mathcal{O}_A := \{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}:\ A \in \mathcal{U}\}$ für $A \subseteq \mathbb{N}$ eine Basis einer Hausdorfftopologie $\mathcal{T}$ in der alle Mengen $\mathcal{O}_A$ sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

4. In einem metrischen Raum ist eine Menge A genau dann präkompakt, wenn jede Folge in A eine Teilfolge besitzt, die Cauchyfolge ist.

5. In einem metrischen Raum (X, d) ist eine Menge A genau dann relativ kompakt, wenn jede Folge in A eine in X konvergente Teilfolge hat.

6. Sei X ein kompakter Hausdorffraum. Dann ist X unter keiner feineren Topologie kompakt und unter keiner gröberen Topologie Hausdorff.

7. Zeigen Sie dass die rekursiv definierte Funktionenfolge

   $$f_n(t) = \frac{1}{2} f_{n-1}(1-t) + \frac{1}{4}\cos(t^2), \quad f_0(t) = 0$$

   auf $[0,1]$ eine gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt.

   Hinw.: Zeigen Sie, dass diese Funktionenfolge aus gleichgradig stetigen gleichmäßig beschränkten Funktionen besteht.

8. Sei S eine kompakte Halbgruppe, d.h. ein kompakter Topologischer Raum K mit einer assoziativen Abbildung $K \times K \to K$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$ Zeigen Sie mit dem Lemma von Zorn, dass es eine minimale nichtleere kompakte Unterhalbgruppe gibt. (Eine Unterhalbgruppe ist eine Teilmenge U von K für die gilt $x \in U,\ y \in U \Rightarrow xy \in U$.

9. Eine Totalordnung $\leq$ auf einer nichtleeren Menge M heißt *Wohlordnung* wenn jede nichtleere Teilmenge von M ein Minimum hat. Zeigen Sie mit dem Lemma von Zorn, dass jede nichtleere Menge eine Wohlordnung besitzt.

   Hinw. Definieren Sie auf der Menge der wohlgeordneten Teilmengen $(K_i, \leq_i)$ eine Teilordnung $\preceq$ durch $(K_i, \leq_i) \prec (K_j, \leq_j)$ für $K_i \subset K_j$, $\preceq_i$ stimmt auf K_i mit $\preceq_j$ überein und $k \in K_j \setminus K_i \Rightarrow l < k\ \forall l \in K_i$.