Übungen zu Analysis 3, 4. Übung 28. 10. 2013

Zeigen Sie:

1. Für eine stetige Funktion $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ sei $T : C[0,1] \to C[0,1]$ durch $Tf(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y)\, dy$ definiert. Zeigen Sie dass T tatsächlich $C[0,1]$ in sich abbildet und das Bild der Einheitskugel von $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ unter T relativ kompakt ist.

2. Gilt für den Operator T aus dem vorherigen Beispiel $K \in C^\infty([0,1] \times [0,1])$, so ist T eine Abbildung von $L^1[0,1]$ nach $C^\infty[0,1]$.

3. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion
$$f(t) = \int_0^1 \frac{1}{x} \sin(tx)\, dx.$$
Begründen Sie dabei genau alle nichtelementaren Schritte!

4. Sei μ ein endliches Maß auf $\mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, und sei für $y \in (0,1)$
$$g(y) = \int_{\mathbb{R}} (1+t^2) \left[\frac{1}{\pi} \arctan \frac{b-t}{y} - \frac{1}{\pi} \arctan \frac{a-t}{y} \right] \, d\mu(t).$$
Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von der beschränkten Konvergenz, dass
$$\lim_{y \searrow 0} g(y) = \int_{(a,b)} (t^2+1)\mu(t) + \frac{1}{2} \int_{\{a,b\}} (t^2+1)\mu(t).$$
Heinweis: Berechnen Sie $\lim_{y \searrow 0}$ des Integranden.

   Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechung, dass der Integrand durch eine von y unabhängige Konstant beschränkt ist. Unterscheiden Sie dazu die Fälle, $t \in [a-1, b+1]$, $t \in (-\infty, a-1)$ und $t \in (b+1, +\infty)$.

5. Für $a, t > 0$ sei
$$u(t,a) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{t^2+x^2} \cos ax \; dx.$$
Zeigen Sie, dass $u : (0,+\infty) \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ stetig ist, und dass für jedes feste $a > 0$ die Funktion $t \mapsto u(t,a)$ differenzierbar ist.

   Weiters berechne man $\lim_{a \to 0} u(t,a)$.

6. Mit der Notation aus dem letzten Beispiel zeige man

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,a) = a^2 u(t,a),$$

und leite mit Hilfe der letzten Aufgaben her, dass $u(t,a) = \frac{\pi}{2}\exp(-at)$.

Hinweis: Man wende zweimal partielle Integration auf $u(t,a)$ an, und vergleiche das Ergebnis mit $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,a)$.

7. Zeigen Sie für die Betafunktion $B(x,y)$

$$\frac{\partial^n}{\partial^n x} B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(\ln t)^n \, dt.$$

8. Für $f \in L^1[0,\infty)$ wird durch $\mathfrak{L}f(s) := \int_0^\infty f(t)e^{-st}\, dt$ eine Funktion $\mathfrak{L}f$ auf $[0,\infty)$ definiert, die auf $[0,\infty]$ stetig und in $(0,\infty)$ unendlich oft differenzierbar ist.

9. Zeigen Sie dass für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ die Abblidung

$$T_f : \; L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n), \; T_f(g) = f * g$$

stetig ist.