Übungen zu Analysis 3, 5. Übung 4. 11. 2013

Zeigen Sie:

1. $\int_0^\infty e^{-x} \cos\sqrt{x}\, dx = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$

2. $\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\, dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{p+nq}$, $\quad p, q > 0$ und zeigen Sie damit $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}$

3. $\int_0^1 \frac{1-t}{1-at^3}\, dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{a^n}{(3n+1)(3n+2)}$ für $a < 1$ und zeigen Sie damit $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$

4. Berechnen Sie $\lim_{t\to\infty} \int_{-1}^4 \frac{t^2+\sqrt{|x|}}{1+t^2x^2}\, dx$

5. Berechnen Sie $\lim_{t\to 0} \int_0^1 \frac{x+\sqrt{tx}}{t+x}\, dx$

6. Charakterisieren Sie jene vollständigen metrischen Räume (M, d) für die gilt: Es gibt $x \in M$ mit $(M \setminus \{x\}, d)$ ist vollständig.

7. Für ein komplexes Maß μ ist die Abbildung Φ: $C_\mathbb{C}[0,1] \to \mathbb{C}$, $f \mapsto \int_{[0,1]} f\, d\mu$ ein stetiges lineares Funktional auf $(C_\mathbb{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ mit Operatornorm $\|\Phi\| \leq \|\mu\|$.

8. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann ist $M \times M$ mit der Maximumsmetrik $d_m((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \max(d(x_1, y_1), d(x_2, y_2))$ ein metrischer Raum und für eine Vervollständigung $(\tilde{M}, \tilde{d})$ von M ist $\tilde{M} \times \tilde{M}$ mit der Maximumsmetrik eine Vervollständigung von $M \times M$.

9. Durch $\sup|f(x)| + \sup|f'(x)|$ wird auf $C^1[0,1]$ (in $[0,1]$ stetig differenzierbar, mit einseitigen Ableitungen bei $0, 1$) eine Norm definiert. Ist $C^1[0,1]$ mit dieser Norm vollständig?