10. Übung zu Analysis 3, 9. 12. 2013

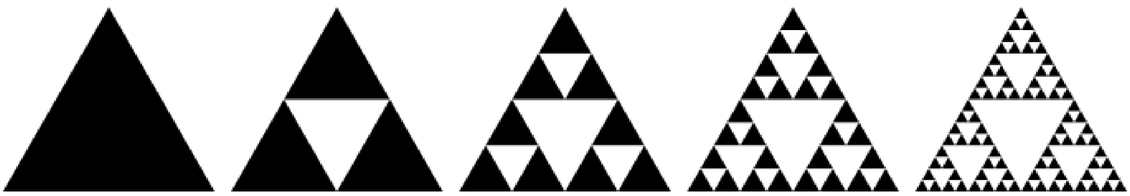
Zeigen bzw. berechnen Sie:

1. Zeigen Sie, dass die Hausdorffdimension eines stetigen Weges $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(a) \neq \gamma(b)$ größer oder gleich eins ist.

2. Die Mengenfunktionen $\mathcal{S}_\delta^s$ und das *Sphärische Hausdorffmaß* $\mathcal{S}^s$ sind wie $\mathcal{H}_\delta^s$ bzw. das Hausdorffmaß $\mathcal{H}^2$ definiert, allerdings werden nur Kugeln für die Mengen C_i in den Überdeckungen zugelassen. Zeigen Sie dass es eine Konstante $C_s > 0$ gibt mit $\mathcal{S}^s \geq \mathcal{H}^s \geq C_s \mathcal{S}^s$. (Im Allgemeinen sind $\mathcal{H}^2$ und $\mathcal{S}^s$ nicht gleich!)

3. Zeigen Sie, dass das Lipschitz-stetige Bild einer beschränkten Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ im $\mathbb{R}^k$ Hausdorffdimension $\leq n$ hat. (Eine Abbildung $\varphi : D \to \mathbb{R}^n$ heißt Lipschitz-stetig, wenn es eine Konstante L gibt für die $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \in D$ gilt.)

4. Verbindet man die Mittelpunkte eines gleichseitigen Dreiecks S_0, so erält man 4 kongruente gleichseitige Dreiecke. Entfernt man aus dem abgeschlossenen gleichseitigen Dreieck das offene mittlere, so erhält man 3 abgeschlossenen Dreicke S_1. Entfernt man induktiv aus den Dreiecken deren Vereinigung S_n darstellt das mittlere, so erhält man S_{n+1}. Das Sierpinskidreieck erhält man als Durchschnitt $S := \cap_{n \in \mathbb{N}} S_n$ dieser abgeschlossenen Mengen: $(S_0, \ldots, S_4)$

   Zeigen Sie, dass die Hausdorffdimension von S nicht größer als $\frac{\log 3}{\log 2}$ ist.

5. Berechnen Sie das Volumen eines von einem Torus

$$\varphi : [0, \pi) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3, \ \varphi(u, v) = ((R - r\cos v)\cos u, (R - r\cos v)\sin u, r \sin v)^T,$$

   $r < R$ berandeten Gebiets des $\mathbb{R}^3$ mithilfe der Transformationsformel.

6. Es sei G der Graph der Funktion $f : [0, 1] \times [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + y$. Berechnen Sie

$$\int_G x \, d\mu_{\mathcal{H}}^2.$$

7. Berechnen Sie die Fläche und den Schwerpunkt des Paraboloids P, das durch

$$x_3(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2,\ x_3 \leq a$$

definiert ist. (Der Schwerpunkt $s = (s_1, s_2, s_3)$ ist durch $s_i = \left(\int_P d\mu_{\mathcal{H}}^2\right)^{-1} \int_P x_i \, d\mu_{\mathcal{H}}^2$ definiert)

8. Berechnen Sie $\int_D \exp(x/(x+y))\, dx, dy$, wobei D durch $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x, y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$ definiert ist durch Transformation auf die Varaiblen $u = x + y$, $v = x/(x + y)$.

9. Berechnen Sie

$$\int_{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\geq 0} \frac{x}{1 + x^2 + y^2} \, d\lambda^2(x, y).$$