Übung zu Analysis 3 (WS 2014/15)

1.Übung (13.10.2014)

1. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Zeige, dass die Abbildung

$$d_0(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}, \quad x,y \in X,$$

eine Metrik auf X ist. Es gilt stets $0 \leq d_0(x,y) \leq 1$.

Zeige, dass für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $x \in X$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ bzgl. } d \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ bzgl. } d_0$$

2. Seien (X_n, d_n), $n \in \mathbb{N}$, metrische Räume. Weiters seien $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen positiver reeller Zahlen mit $\alpha_n \to 0$ und $\sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n < \infty$. Definiere Abbildungen $d, d' : \big(\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n\big)^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$d(\xi,\eta) := \max_{n\in\mathbb{N}} \Big(\alpha_n \frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)}\Big), \quad d'(\xi,\eta) := \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)},$$

$$\xi = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \eta = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n\,.$$

Zeige, dass d und d' Metriken auf $X := \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ sind.

Zeige, dass für eine Folge $(\xi_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $\xi_m = (x_{m,n})_{n\in\mathbb{N}} \in X$, und $\xi \in X$ gilt

$$\Big(\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{m\to\infty} x_{m,n} = x_n \text{ bzgl. } d_n\Big) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{m\to\infty} \xi_m = \xi \text{ bzgl. } d \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{m\to\infty} \xi_m = \xi \text{ bzgl. } d'$$

Ist $x \in \mathbb{Z}$, so schreiben wir die Primfaktorzerlegung von x in der Form $x = \pm \prod_{q \text{ prim}} q^{n(q)}$. Sei nun eine Primzahl p festgehalten, dann definieren wir $d_{(p)} : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ durch

$$d_{(p)}(x,y) := \begin{cases} p^{-n(p)} & , \ x \neq y, x-y = \pm \prod_{q \text{ prim}} q^{n(q)} \\ 0 & , \ x = y \end{cases}$$

Die Zahl $d_{(p)}(x,y)^{-1} = p^{n(p)}$ ist also die größte Potenz der Primzahl p welche die Differenz $x-y$ teilt. Die Abbildung $d_{(p)}$ heißt auch die p-adische Metrik auf $\mathbb{N}_0$. In ganz ähnlicher Weise könnte man auch eine p-adische Metrik auf der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen definieren.

3. Zeige, dass $d_{(p)}$ tatsächlich eine Metrik ist. Um die Dreiecksungleichung einzusehen, zeige dass sogar die stärkere Ungleichung

$$d_{(p)}(x,z) \leq \max\{d_{(p)}(x,y), d_{(p)}(y,z)\}, \quad x,y,z \in \mathbb{N}_0\,,$$

gilt.

4. Betrachte neben $d_{(p)}$ auch noch die euklidische Metrik $d(x,y) := |x-y|$ auf $\mathbb{N}_0$. Finde eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die in $(\mathbb{N}_0, d_{(p)})$ konvergiert, aber in $(\mathbb{N}_0, d)$ divergiert.

Jede Zahl $x \in \mathbb{N}_0$ lässt sich in eindeutiger Weise anschreiben als $x = \sum_{k=0}^{N} a_k p^k$ mit einer gewissen Zahl $N \in \mathbb{N}_0$ und gewissen Zahlen $a_0, \ldots, a_N \in \{0, \ldots, p-1\}$, $a_N \neq 0$. Man spricht von der Zifferndarstellung von x zur Basis p. Wir schreiben auch $x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k$ wobei wir $a_k := 0$ für $k > N$ setzen. Es ist also für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Abbildung $\pi_n : \mathbb{N}_0 \to \{0, \ldots, p-1\}$ wohldefiniert durch die Vorschrift $\pi_n : x \mapsto a_n$, wobei a_n der entsprechende Koeffizient in der Zifferndarstellung von x zur Basis p ist.

5. Zeige, dass π_n eine stetige Funktion des metrischen Raumes $(\mathbb{N}_0, d_{(p)})$ auf den metrischen Raum $(\{0, \dots, p-1\}, d)$ ist, wobei d die diskrete Metrik

$$d(x,y) := \begin{cases} 1 & , \ x \neq y \\ 0 & , \ x = y \end{cases}, \qquad x, y \in \{0, \dots, p-1\},$$

bezeichnet.

6. Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine beliebige Folge ganzer Zahlen. Zeige, dass die Folge

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k p^k, \ n \in \mathbb{N}_0,$$

eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{N}_0, d_{(p)})$ ist. Zeige, dass $(\mathbb{N}_0, d_{(p)})$ nicht vollständig ist.
Hinweis: Für die nicht-Vollständigkeit: Seien alle a_k in $\{0, \dots, p-1\}$, was ist dann $\pi_{n_0}(S_n)$?

7. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum der Hausdorff ist und sei $x \in X$. Zeige, dass $\bigcap_{U \in \mathfrak{U}(x)} U = \{x\}$, sowie dass $\{x\}$ abgeschlossen ist.

Betrachte die Menge $\mathbb{R}_\infty := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ wobei ∞ ein formales Symbol ist. Definiere $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}_\infty)$ wie folgt: Eine Menge $E \subseteq \mathbb{R}_\infty$ gehört zu $\mathcal{B}$ genau dann wenn entweder $E = (a, b)$ für gewisse $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, oder wenn $E = \mathbb{R}_\infty \setminus [a, b]$ für gewisse $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.

Ausgehend von $\mathcal{B}$ definieren wir $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}_\infty)$ als die Menge aller Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{B}$, d.h.

$$\mathcal{T} := \Big\{ E \subseteq \mathbb{R}_\infty : \ \exists\, I, (E_i)_{i \in I} : \ E_i \in \mathcal{B}, \ E = \bigcup_{i \in I} E_i \Big\}$$

Dabei verstehen wir die Vereinigung einer leeren Menge von Mengen als die leere Menge.

8. Zeige, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $\mathbb{R}_\infty$ ist und dass diese Topologie Hausdorff ist. Finde eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in \mathbb{R}$, mit $\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$ in $(\mathbb{R}_\infty, \mathcal{T})$.

9. Sei X eine Menge, und seien $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}'$ Topologien auf X. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

   (*i*) $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.

   (*ii*) $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ ist stetig.

   (*iii*) Für jeden topologischer Raum $(Y, \mathcal{V})$ und jede stetige Funktion $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{V})$ ist auch die Funktion $f : (X, \mathcal{T}') \to (Y, \mathcal{V})$ stetig.

   (*iv*) Für jeden topologischer Raum $(Y, \mathcal{V})$ und jede stetige Funktion $f : (Y, \mathcal{V}) \to (X, \mathcal{T}')$ ist auch die Funktion $f : (Y, \mathcal{V}) \to (X, \mathcal{T})$ stetig.

[§]Wenn nicht explizit etwas anderes gesagt wird, sind in Hinweisen angegebenen Aussagen zu beweisen (falls sie verwendet werden und falls sie nicht ohnehin Sätze aus Vorlesung oder Übung sind).