Übung zu Analysis 3 (WS 2014/15)

10.Übung (12.1.2015)

82. Betrachte die Abbildung
$$\gamma : \begin{cases} (-\pi/2, 3\pi/2) & \to \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto \binom{\sin 2t}{\cos t} \end{cases}$$

   (a) Skizziere die Kurve γ. Hat $d\gamma$ immer vollen Rang? Zeige, dass $\operatorname{ran}\gamma$ $(= \gamma((-\pi/2, 3\pi/2)))$ keine Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^2$ ist.

   (b) Finde eine Topologie $\mathcal{T}$ auf $\operatorname{ran}\gamma$, sodass $(\operatorname{ran}\gamma, \mathcal{T})$ Hausdorff ist, dass $\mathcal{T}$ eine abzählbare Basis besitzt, und dass $\gamma : ((-\pi/2, 3\pi/2), \mathcal{E}) \to (\operatorname{ran}\gamma, \mathcal{T})$ ein Homeomorphismus ist. Dabei bezeichnet $\mathcal{E}$ die Spurtopologie auf $(-\pi/2, 3\pi/2)$ der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}$.

   (c) Sei $\mathfrak{U}_{\mathcal{T}}$ der Umgebungsfilter bezüglich $\mathcal{T}$ am Punkt $\gamma(\pi/2)$, und $\mathfrak{U}_{\mathcal{E}}$ der Umgebungsfilter bezüglich $\mathcal{E}$ am Punkt $\gamma(\pi/2)$. Welche der Inklusionen $\mathfrak{U}_{\mathcal{E}} \subseteq \mathfrak{U}_{\mathcal{T}}$ byw. $\mathfrak{U}_{\mathcal{T}} \subseteq \mathfrak{U}_{\mathcal{E}}$ gilt ?

83. Sei die $(p-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^p$ implizit definiert durch $F(x) = 0$. Man zeige, dass für $y \in M$ die Tangentialebene T_y durch
$$\{t \in \mathbb{R}^p : dF(y)t = 0\}$$
gegeben ist. Somit steht $dF(y)^T$ normal auf T_y.
Hinweis: Ist $\phi : D \to M$ eine Einbettung mit $\phi(s) = y$ und $D \subseteq \mathbb{R}^{p-1}$, so leite man die Gleichung $F \circ \phi(t) = 0$, $t \in D$, partiell nach $t_1, \dots, t_{p-1}$ ab.

84. Sei $G = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1, -1 < x_3 < 1\}$ und $F : \mathbb{R}^3 \to L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ das Vektorfeld $F((x_1, x_2, x_3)^T) = (2x_1, x_2^2, x_3^2)$. Man zeige mit dem Gaußschen Integralsatz, dass
$$\int_{\partial G} F(y)v(y)\, d\mu(x) = 4\pi\,.$$

85. Finde ein Beispiel einer offenen Teilmenge G des $\mathbb{R}^2$, sodass es eine Funktion $h : \overline{G} \to \mathbb{R}^2$ gibt mit
   - h stetig, $h|_G$ stetig differenzierbar, $h_i|_{\partial^o G} \in L^1(\mu_{\partial^o G})$, $\frac{\partial h_i}{\partial x_j} \in L^1(\lambda_2)$.
   - $\int_G \operatorname{div} h\, d\lambda_2 \neq \int_{\partial^o G} \nu(u)^T h(u)\, d\mu_{\partial^o G}(u)$.

86. Für ein endliches positives Borelmaß μ auf $\mathbb{R}$ setze (die *Fouriertransformierte des Maßes* μ)
$$\hat{\mu}(z) := \int_{\mathbb{R}} e^{-ixz}\, d\mu(x), \quad z \in \mathbb{R}\,.$$

   (a) Zeige, dass $\hat{\mu}$ ein stetige und beschränkte Funktion ist, und dass $\|\hat{\mu}\|_\infty \leq \|\mu\|$, wobei $\|\mu\| := \mu(\mathbb{R})$.

   (b) Finde ein Maß μ sodass $\hat{\mu} \notin C_0(\mathbb{R})$ (hier bezeichnet $C_0(\mathbb{R})$ die Menge der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ die bei $\pm\infty$ Limes Null haben).

   (c) Zeige, dass für je endlich viele Punkte $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ die Matrix $(\hat{\mu}(t_j - t_i))_{i,j=1}^n$ positiv semidefinit ist.

Legt ein Punkt unter dem Einfluss einer konstanten Kraft $F = (F_1, F_2, F_3)$ eine Strecke $\overline{PQ}$ der Länge l geradlinig zurück, so ist die dabei verrichtete *Arbeit* gegeben als $A = \|F\| l \cos\vartheta$, wobei ϑ den Winkel bezeichnet den der Kraftvektor mit dem Vektor $\vec{PQ}$ einschliesst.

Bewegt sich nun ein Punkt längs einer Kurve M, beschrieben von einer Funktion $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, unter dem Einfluss eines Kraftfeldes $F : M \to L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, so ist die Arbeit die bei dieser Bewegung verrichtet wird gleich
$$A = \int_M F\mathfrak{t}\, d\mu\,, \tag{2}$$
wobei $\mathfrak{t}$ den normierten Tangentialvektor $\mathfrak{t}(x) := \frac{\phi'(\phi^{-1}(x))}{\|\phi'(\phi^{-1}(x))\|}$, $x \in M := \phi((a, b))$, bezeichnet, und wobei $d\mu$ das Oberflächenmaß von M ist.

87. Mit obigen Bezeichnungen zeige die Formel

$$A = \int_a^b F(\phi(t))\phi'(t)\, dt\,,$$

und motiviere anhand dieser in geometrischer Weise dass man das Integral (2), in natürlicher Verallgemeinerung einer geradlinigen Bewegung, als Arbeit bezeichnet.

88. Betrachte eine Gravitationsquelle welche sich im Punkt 0 unseres Koordinatensystems befindet. Dann ist das Kraftfeld in Raum das auf Massenpunkte wirkt gegeben als

$$F(x, y, z) = \frac{m}{r^3}(x, y, z)\,.$$

Berechne die Arbeit A_{ϕ_1} bzw. A_{ϕ_2} die verrichtet wird, wenn man einen Massenpunkt mit Masse 1 vom Punkt $P = (0, 0, 1)$ nach $Q = (0, 1, 0)$ verschiebt, und zwar längs der Wege:

(a) Der Halbkreisbogen $\phi_1(t) := (0, \sin t, \cos t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$;

(b) Der Polygonzug

$$\phi_2(t) := \begin{cases} (t, 0, 1-t) & , \ t \in [0, 1] \\ (2-t, t-1, 0) & , \ t \in [1, 2] \end{cases}$$

Der Zustand eines (idealen) Gases wird beschrieben durch die Größen p, V, und T, das sind *Druck*, *Volumen*, sowie *Temperatur*. Es gilt die *Clapeyron'sche Formel* $pV = RT$ wobei R die *Gaskonstante* ist. Es wird der Zustand des Gases also durch zwei dieser drei Größen vollständig charakterisiert, zum Beispiel durch Druck und Volumen.

Ändert das Gas seinen Zustand von $P = (p_0, V_0)$ zu $Q = (p_1, V_1)$ längs einer Kurve $\gamma(t)$ im (p, V)-Koordinatensystem, so ist die während dieses Prozesses absorbierte Wärmemenge gleich

$$Q = \int_M F\mathfrak{t}\, d\mu$$

wobei M die Kurve $\gamma([0, 1])$ ist, $\mathfrak{t}$ den normierten Tangentialvektor an diese Kurve bezeichnet, und wobei

$$F = \Big(\frac{c_V}{R}V, \frac{c_p}{R}p\Big)$$

ist. Dabei ist c_V die *spezifische Wärme* des Gases bei konstantem Volumen, und c_p seine *spezifische Wärme* bei konstantem Druck.

89. Betrachte ein Gas mit Gaskonstante $R = 1$, und spezifischen Wärmen $c_V = 1$, $c_p = 2$. Dieses werde einem Prozess unterworfen, welcher im (p, V)-Koordinatensystem durch die Bewegung längs der Kurve $\gamma(t) = (2, 2) + (\sin t, \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, beschrieben wird. Berechne die während dieses Prozesses absorbierte Wärmemenge. Hat Sie das Ergebnis dieser Rechnung erstaunt?

Wir betrachten die Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit mit Dichte 1. Diese wird beschrieben durch ein Vektorfeld $V : O \to \mathbb{R}^3$ wobei $V(x)$ die Strömungsgeschwindigkeit an der Stelle x bedeutet. Wir setzen hierbei voraus, dass die betrachtete Strömung stationär ist, d.h. dass die Strömungsgeschwindigkeit nur vom Ort x, nicht aber von der Zeit abhängt.

Es liege nun eine Fläche in der Strömung, und wir fragen uns wieviel Flüssigkeit pro Zeiteinheit von links nach rechts durch diese Fläche hindurchfliesst. Stellt man sich vor die Fläche wäre ein Rechteck und die Strömungsgeschwindigkeit v wäre auf der ganzen Fläche konstant, so wäre der Fluss durch die Fläche gleich $\nu^T V \cdot F$ wobei ν den Normalenvektor an die Fläche bezeichnet der nach rechts zeigt und F die Fläche des Rechtecks ist.

Nunmehr verwundert es nicht, dass man definiert: Sei M eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ und $V : M \to \mathbb{R}^3$ stetig. Sei vorausgesetzt, dass es eine auf ganz M stetige Normale $\nu(x)$ gibt. Dann heißt $\int_M \nu(x)^T V(x)\, d\mu(x)$, wobei $d\mu$ das Oberflächenmaß von M ist, der *Fluss* des Vektorfeldes V durch M.

90. Betrachte $H = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 = a,\ x_3 > 0\}$, wobei $a > 0$. Weiters sei $F((x_1, x_2, x_3)^T) = (x_1 x_3^2, x_1^2 x_2 - x_3^3, 2x_1 x_2 + x_2^2 x_3)$. Berechne den Fluss von F über H, d.h. $\int_H F(y)v(y)\, d\mu(y)$, wobei $v(y) = a^{-1}y$.
    Hinweis: Betrachte H als einen Teil des Randes der oberen Halbkugel, und wende den Gaußschen Integralsatz an.

Wir betrachten eine Quelle aus der Flüssigkeit austritt. Um die Ergiebigkeit dieser Quelle quantitativ zu fassen, stellen wir uns vor sie sei von einem kleinen Quader (mit einem Eckpunkt in (x_0, y_0, z_0) und Kantenlängen $\Delta x, \Delta y, \Delta z$) umgeben und fragen uns wieviel Flüssigkeit der Quelle durch diesen Quader zum Beispiel in Richtung der positiven x-Achse hinausfliesst. Offenbar ist dies gerade die Differenz $(V(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - V(x_0, y_0, z_0))\Delta y \Delta z$. Hier haben wir wieder angenommen, dass die Flüssigkeit inkompressibel ist und Massendichte 1 hat. Nun haben wir

$$\big(V(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - V(x_0, y_0, z_0)\big)\Delta y \Delta z \simeq \frac{\partial V}{\partial x} \Delta x \cdot \Delta y \Delta z\,.$$

Genauso verfährt man für die aus dem Quader austretende Flüssigkeitsmenge in Richtung der y- bzw. z-Achse. Nun verwundert es nicht, dass man die Grösse $\int_G (\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z})\, d\lambda_3$ als *Quellenstärke* aller Quellen im Volumen G, welche sich in einer Flüssigkeit mit Strömungsfeld V befinden, bezeichnet.

91. Hat man eine inkompressible stationäre Flüssigkeit in einem Volumen O und ist G ein Teilgebiet von O mit $\overline{G} \subseteq O$, so sollte anschaulich wohl die Quellenstärke aller Quellen innerhalb von G gerade gleich dem Fluss durch ∂G sein. Welcher Satz der Vorlesung besagt, dass dies tatsächlich so ist?

[§]Wenn nicht explizit etwas anderes gesagt wird, sind in Hinweisen angegebenen Aussagen zu beweisen (falls sie verwendet werden und falls sie nicht ohnehin Sätze aus Vorlesung oder Übung sind).