Übung zu Analysis 3 (WS 2014/15)

11.Übung (19.1.2015)

Der Schwerpunkt S einer Fläche B ist jener Punkt mit der folgenden Eigenschaft: Wäre die gesamte Masse der Fläche im Punkt S konzentriert, so hätte dieser Massenpunkt bezüglich jeder Drehachse die gleichen Drehmomente wie die ganze Fläche.

92. Begründe, dass der Schwerpunkt einer homogen mit Masse belegten Fläche B notwendig die Koordinaten
$$x_S = \frac{1}{F(B)} \int_B x \, d\lambda_2, \; y_S = \frac{1}{F(B)} \int_B y \, d\lambda_2$$
haben muss. Bestimme den Schwerpunkt der Fläche die von der x-Achse und einem vollen Bogen der Zykloide $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$, begrenzt wird.

93. Die zweite Guldinsche Regel besagt: Das Volumen eines Körpers, der durch Drehung einer ebenen Figur um eine sie nicht schneidende Achse entsteht, ist gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt dieser Figur und dem Umfang des Kreises, den der Schwerpunkt der Figur bei der Drehung beschreibt.

    Zeige diese Regel für den Fall einer um die x-Achse rotierenden Fläche der Gestalt $F := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le f(x), a \le x \le b\}$.

94. Sei $r > 0$ und sei G die Menge aller Vektoren im $\mathbb{R}^2$ mit Länge $< r$. Man bestimme die äußere Normale $v(x, y)$ durch einen Punkt $(x, y) \in \partial^o G$. Sei
$$g(x, y) = \begin{pmatrix} (1 - x^2)y \\ (1 - y^2)x \end{pmatrix}.$$
Berechne das Flussintegral
$$\int_{\partial^o G} g(x, y) v(x, y) \, d\mu(x, y)$$
auf zwei Arten. Nämlich einmal direkt und einmal mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes.

95. Berechne mit Hilfe des Satzes von Gauß für die Funktion
$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ -2xy \\ 2z \end{pmatrix}$$
das Flussintegral $\int_{\partial^o G} f(x, y, z) v(x, y, z) \, d\mu(x, y, z)$, wobei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und beschränkt so ist, dass sich $\partial^o G = \partial^s G$ aus den Flächen
$$\begin{aligned} S_1 &: \; x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4, \quad z > 1, \\ S_2 &: \; (z + 5)^2 = 9(x^2 + y^2), \quad z \in (-5, 1) \end{aligned}$$
zusammensetzt. Skizze!

96. Sei μ ein endliches Borelmaß auf $\mathbb{R}$, und bezeichne mit F die zu μ gehörige Verteilungsfunktion. Zeige, dass F genau dann stetig ist, wenn $\mu(E) = 0$ für jede endliche Menge E ist.

97. Sei μ ein endliches Borelmaß auf $\mathbb{R}$, bezeichne mit F die zu μ gehörige Verteilungsfunktion, und sei vorausgesetzt, dass F stetig ist. Weiters sei $p \in [1, \infty)$, und setze
$$a := \lim_{t \to -\infty} F(t), \; b := \lim_{t \to +\infty} F(t) \,.$$
Zeige: Ist $f \in L^p((a, b), \mathfrak{B} \cap (a, b), \lambda)$, so ist $f \circ F$ in $L^p(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \mu)$. Die Abbildung $f \mapsto f \circ F$ ist linear und isometrisch, d.h. es gilt stets
$$\int_{\mathbb{R}} |f \circ F|^p \, d\mu = \int_{(a,b)} |f|^p \, d\lambda \,.$$

Ist $f \mapsto f \circ F$ bijektiv als Abbildung von $L^p((a,b), \mathfrak{B} \cap (a,b), \lambda)$ nach $L^p(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \mu)$?
Hinweis: Betrachte zuerst Funktionen der Bauart $f = \mathbb{1}_{(c,d]}$ mit $a < c < d < b$, und verwenden dann ein Dichtheitsargument.

98. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, und seien $p, q \in [1, +\infty)$. Zeige, dass $L^p \cap L^q$ dicht in L^p bzgl. $\|.\|_p$ ist.

99. Sei $p \in [1, \infty)$. Für $f \in L^p(\mathbb{R})$ setze

$$g(x) := \int_{(x,x+1)} f(t)\, d\lambda(t)\,.$$

Zeige, dass $g \in C_0(\mathbb{R})$.

100. Seien $p, q \in [1, +\infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, und seien $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$. Zeige, dass $t \mapsto f(x-t)g(t)$ fr jedes $x \in \mathbb{R}^d$ integrierbar ist. Sei

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)\, d\lambda_d(t), \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Zeige, dass $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$ gilt, und dass $f * g$ gleichmäßig stetig ist.

101. Seien $p, q \in (1, +\infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, und $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$. Zeige, dass $f * g$ in $C_0(\mathbb{R}^d)$ liegt.
Hinweis: Betrachte zuerst Indikatorfunktionen.

§Wenn nicht explizit etwas anderes gesagt wird, sind in Hinweisen angegebenen Aussagen zu beweisen (falls sie verwendet werden und falls sie nicht ohnehin Sätze aus Vorlesung oder Übung sind).