Übung zu Analysis 3 (WS 2014/15)

`3.Übung (27.10.2014)`

18. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $x \in X$ und $M \subseteq X$. Dann gilt $x \in \overline{M}$ genau dann, wenn jede Umgebung von x mit M nichtleeren Schnitt hat.

19. Sei X eine Menge und sei $\alpha : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ eine Abbildung mit den Eigenschaften

    (i) $\alpha(\emptyset) = \emptyset$;

    (ii) $M \subseteq \alpha(M)$, $M \in \mathcal{P}(X)$;

    (iii) $\alpha(M_1 \cup M_2) = \alpha(M_1) \cup \alpha(M_2)$, $M_1, M_2 \in \mathcal{P}(X)$;

    (iv) $\alpha \circ \alpha = \alpha$.

    Zeige, dass es eine eindeutige Topologie $\mathcal{T}$ auf X gibt, sodass (hier bezeichnet $\overline{M}$ den Abschluß von M bzgl. der Topologie $\mathcal{T}$)
    $$\overline{M} = \alpha(M), \quad M \in \mathcal{P}(X).$$

20. Sei X eine Menge, seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, $(Z_k, \mathcal{V}_k)$, $k \in K$, zwei Familien topologischer Räume. Weiters seien $f_i : X \to X_i$, $i \in I$, und $h_k : Z_k \to X$, $k \in K$, Abbildungen. Bezeichne mit $\mathcal{T}_{ini}$ die initiale Topologie auf X bezüglich der Familie $\{f_i : i \in I\}$, und mit $\mathcal{T}_{fin}$ die finale Topologie auf X bezüglich der Familie $\{h_k : k \in K\}$. Wir stellen uns die Frage

    > Gibt es eine (kleinste bzw. größte) Topologie auf X, mit der Eigenschaft dass alle Funktionen f_i und h_k bezüglich dieser stetig sind ?

    Finde und beweise einen Satz der folgenden Gestalt:

    Satz: *Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

    (i) *Es existiert eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X, sodass jede Funktion f_i $\mathcal{T}$-$\mathcal{T}_i$–stetig ist und jede Funktion h_k $\mathcal{V}_k$-$\mathcal{T}$–stetig ist.*

    (ii) *Die Topologien $\mathcal{T}_{ini}$ und $\mathcal{T}_{fin}$ stehen in der Beziehung ……*

    (iii) *Die Funktionen $f_i \circ g_k$ haben sämtliche die Eigenschaft ……*

    Ist eine (und damit alle) dieser Aussagen wahr, so gibt es sowohl eine kleinste als auch eine größte Topologie $\mathcal{T}$ mit der Eigenschaft aus (i), nämlich ……

21. Seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, topologische Räume, sei X eine Menge, und seien $f_i : X \to X_i$, $i \in I$, Abbildungen. Bezeichne mit $\mathcal{T}$ die initiale Topologie auf X bezüglich der Familie $\{f_i : i \in I\}$ von Abbildungen.

    Sei vorausgesetzt, dass die Familie $\{f_i : i \in I\}$ punktetrennend operiert, d.h. dass es zu je zwei verschiedenen Punkten $a, b \in X$ eine Funktion f_{i_0} gibt mit $f_{i_0}(a) \neq f_{i_0}(b)$. Zeige: Sind alle Räume $(X_i, \mathcal{T}_i)$ Hausdorff, so hat auch $(X, \mathcal{T})$ diese Eigenschaft.

22. Sei (X, d) ein metrischer Raum und bezeichne mit $\mathcal{T}$ die von der Metrik auf X induzierte Topologie. Weiters sei eine Teilmenge $Y \subseteq X$ gegeben. Auf Y haben wir dann einerseits die Metrik $d_1 := d|_{Y \times Y}$ und die von d_1 auf Y induzierte Topologie $\mathcal{T}_1$, andererseits die Spurtopologie $\mathcal{O}$ von $\mathcal{T}$. Zeige, dass $\mathcal{T}_1 = \mathcal{O}$.

23. Seien (X_n, d_n), $n \in \mathbb{N}$, metrische Räume mit $d_n(x_n, y_n) \leq 1$, $x_n, y_n \in X_n$, und bezeichne mit $\mathcal{T}_n$ die von d_n auf X_n induzierte Topologie. Auf der Menge $X := \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ haben wir dann einerseits die Metrik d definiert als ($\alpha_n > 0$ und $\alpha_n \to 0$)
    $$d\big((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}\big) := \max_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n d_n(x_n, y_n)$$
    und die Topologie $\mathcal{T}$ welche von dieser Metrik auf X induziert wird, andererseits die Produkttopologie $\mathcal{O}$ der Topologien $\mathcal{T}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $\mathcal{T} = \mathcal{O}$.

24. Sei $(Y, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $X \subseteq Y$, und sei X mit der Spurtopologie $\mathcal{T}|_X$ versehen. Zeige die folgenden Aussagen.

   (a) Sei $x \in X$, $U \subseteq X$. Dann ist U eine Umgebung von x bzgl. $\mathcal{T}|_X$ genau dann, wenn es eine Umgebung $V \subseteq Y$ von x bzgl. $\mathcal{T}$ gibt sodass $U = V \cap X$.

   (b) Sei $M \subseteq X$, und bezeichne mit $\operatorname{Clos}_X M$ bzw. $\operatorname{Clos}_Y M$ den Abschluss von M im Raum $(X, \mathcal{T}|_X)$ bzw. in $(Y, \mathcal{T})$. Dann gilt $\operatorname{Clos}_X M = X \cap \operatorname{Clos}_Y M$.

25. Seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$,$i \in I$, und betrachte den Produktraum $X := \prod_{i \in I} X_i$ versehen mit der Produkttopologie. Weiters seien $A_i \subseteq X_i$, $i \in I$. Zeige, dass gilt

$$\operatorname{Clos}_{\prod_{i \in I} X_i} \left(\prod_{i \in I} A_i \right) = \prod_{i \in I} \operatorname{Clos}_{X_i} A_i \,,$$

   wobei die Abschlüsse bezüglich der Produkttopologie bzw. der gegebenen Topologien $\mathcal{T}_i$ zu verstehen sind.

   Folgere, dass die Menge $\prod_{i \in I} A_i$ genau dann in der Produkttopologie abgeschlossen ist wenn alle A_i abgeschlossen in $\mathcal{T}_i$ sind, sowie dass $\prod_{i \in I} A_i$ genau dann bzgl. der Produkttopologie dicht ist wenn alle A_i dicht bzgl. $\mathcal{T}_i$ sind.

26. Sei $\mathbb{R}$ versehen mit der euklidischen Topologie $\mathcal{E}$. Betrachte auf $\mathbb{R}$ die Äquivalenzrelation $\sim$ die definiert ist als $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$, und bezeichne $\mathbb{R}/\mathbb{Z} := \mathbb{R}/_\sim$. Sei $\mathcal{T}$ die finale Topologie auf $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ bezüglich der kanonischen Projektion $\pi : (\mathbb{R}, \mathcal{E}) \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $x \mapsto [x]_\sim = x + \mathbb{Z}$.

   Zeige dass π eine offene Abbildung ist, d.h., dass das Bild jeder offenen Menge unter π wieder offen ist. Gilt auch dass das Bild jeder abgeschlossenen Menge wieder abgeschlossen ist?

   Weiters zeige dass die Abbildung $\Phi : [x]_\sim \to e^{2\pi i x}$ eine wohldefinierte und bijektive Funktion von $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ist, und dass Φ und Φ^{-1} beide stetig sind[1].

27. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Zeige die folgenden Äquivalenzen.

   (a) $(X, \mathcal{T})$ ist T_1 genau dann, wenn jede einpunktige Menge abgeschlossen ist.

   (b) $(X, \mathcal{T})$ ist T_3 genau dann, wenn für jeden Punkt $x \in X$ die Menge aller abgeschlossenen Umgebungen von x eine Umgebungsbasis von x bildet.

---

[1] Eine Funktion Φ zwischen zwei topologischen Räumen mit den Eigenschaften dass Φ bijektiv ist und dass Φ und Φ^{-1} beide stetig sind, nennt man auch einen *Homöomorphismus*.

[§] Wenn nicht explizit etwas anderes gesagt wird, sind in Hinweisen angegebenen Aussagen zu beweisen (falls sie verwendet werden und falls sie nicht ohnehin Sätze aus Vorlesung oder Übung sind).