Übung zu Analysis 3 (WS 2014/15)

4.Übung (3.11.2014)

28. Finde eine Basis der von der p-adischen Metrik $d_{(p)}$ auf $\mathbb{N}_0$ induzierten Topologie welche aus Mengen besteht die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind. Bestimme alle zusammenhängenden Teilmengen von $(\mathbb{N}_0, d_{(p)})$.
Hinweis: In jedem metrischen Raum bildet die Menge aller Kugeln eine Basis.

29. Kann man für den topologischen Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ (wobei $\mathcal{E}$ die euklidische Topologie ist) eine Basis aus gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Mengen finden? Falls ja, finde eine. Falls nein, beweise dies.

Sei $(I, \preceq)$ eine gerichtete Menge und sei $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, eine Familie topologischer Räume. Für je zwei Indices $i, j \in I$ mit $i \preceq j$ sei $f_i^j : X_j \to X_i$ eine stetige Abbildung, sodass $f_i^i = \mathrm{id}_{X_i}$, $i \in I$, und $f_i^k \circ f_k^j = f_i^j$, $i \preceq k \preceq j$.

Bezeichne mit $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$, $j \in I$, die kanonische Projektion des direkten Produktes auf seine j-te Komponente. Wir definieren nun

$$\varprojlim_{i\in I} X_i := \left\{ (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i : \ f_i^j(x_j) = x_i, i \preceq j \right\}.$$

Bezeichne mit $\tilde{\pi}_j$ die Einschränkung von π_j auf $\varprojlim_{i\in I} X_i$, und mit $\varprojlim_{i\in I} \mathcal{T}_i$ die initiale Topologie auf $\varprojlim_{i\in I} X_i$ bezüglich der Familie $\{\tilde{\pi}_i : i \in I\}$ von Abbildungen.

Man bezeichnet $\langle \varprojlim_{i\in I} X_i, \varprojlim_{i\in I} \mathcal{T}_i, \tilde{\pi}_i \rangle$ auch als den inversen Limes der Familie $\langle (X_i, \mathcal{T}_i), f_i^j \rangle$.

$$\begin{tikzcd}
& & \varprojlim_{i\in I} X_i \arrow[dl, squiggly, "\tilde{\pi}_i"'] \arrow[dr, squiggly, "\tilde{\pi}_j"] & & \\
\cdots & X_i \arrow[l] & \cdots\cdots \arrow[l] & X_j \arrow[l] \arrow[ll, bend left, "f_i^j"] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

30. Zeige:
   - (a) Die Topologie $\varprojlim_{i\in I} \mathcal{T}_i$ ist die Spurtopologie auf $\varprojlim_{i\in I} X_i$ von der Produkttopologie $\prod_{i\in I} \mathcal{T}_i$ auf $\prod_{i\in I} X_i$.
   - (b) Sind alle Räume $(X_i, \mathcal{T}_i)$ Hausdorff, so ist $\varprojlim_{i\in I} X_i$ ein abgeschlossener Teilraum von $\prod_{i\in I} X_i$.

31. Zeige:
   - (a) Sei $(Y, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum gemeinsam mit einer Familie stetiger Abbildungen $\nu_i : Y \to X_i$, $i \in I$, für welche $f_i^j \circ \nu_j = \nu_i$, $i \preceq j$, gilt. Dann existiert genau eine $\mathcal{O}$-($\varprojlim_{i\in I} \mathcal{T}_i$)–stetige Funktion $\varphi : Y \to \varprojlim_{i\in I} X_i$, sodass $\nu_i = \varphi \circ \tilde{\pi}_i$, $i \in I$.
   - (b) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum gemeinsam mit stetigen Abbildungen $\alpha_i : X \to X_i$, $i \in I$, mit $f_i^j \circ \alpha_j = \alpha_i$, $i \preceq j$. Sei vorausgesetzt dass die universelle Eigenschaft, welche wir im vorigen Punkt für $\langle \varprojlim_{i\in I} X_i, \varprojlim_{i\in I} \mathcal{T}_i, \tilde{\pi}_i \rangle$ gezeigt haben, für $\langle X, \mathcal{T}, \alpha_i \rangle$ gilt. Dann existiert ein Homöomorphismus Φ von $(X, \mathcal{T})$ auf $(\varprojlim_{i\in I} X_i, \varprojlim_{i\in I} \mathcal{T}_i)$ mit $\alpha_i = \tilde{\pi}_i \circ \Phi$, $i \in I$.

Zu (a):

$$\begin{tikzcd}
& & Y \arrow[d, dashed, "\varphi"] \arrow[ddl, dotted, bend right, "\nu_i"'] \arrow[ddr, dotted, bend left, "\nu_j"] & & \\
& & \varprojlim_{i\in I} X_i \arrow[dl, squiggly, "\tilde{\pi}_i"'] \arrow[dr, squiggly, "\tilde{\pi}_j"] & & \\
\cdots & X_i \arrow[l] & \cdots\cdots \arrow[l] & X_j \arrow[l] \arrow[ll, bend left, "f_i^j"] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Zu (b):

$$\begin{tikzcd}
& & & X \arrow[lll, dashed, bend right, "\Phi"'] \arrow[dl, squiggly, "\alpha_i"'] \arrow[ddl, squiggly, "\alpha_j"] \\
\varprojlim_{i\in I} X_i \arrow[rr, squiggly, "\tilde{\pi}_i"] \arrow[drr, squiggly, "\tilde{\pi}_j"'] & & X_i & \\
& & X_j \arrow[u, bend right, "f_i^j"'] & \\
& & & \ddots \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Sei p eine Primzahl. Für $n \in \mathbb{N}_0$ betrachte den topologischen Raum $(\mathbb{Z}/_{p^n\mathbb{Z}}, \mathcal{T}_{dis})$ wobei $\mathcal{T}_{dis}$ die diskrete Topologie ist. Für $n \leq m$ sei $f_n^m : \mathbb{Z}/_{p^m\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}/_{p^n\mathbb{Z}}$ die Abbildung

$$f_n^m\big([x]_{p^m\mathbb{Z}}\big) := [x]_{p^n\mathbb{Z}}, \quad x \in \mathbb{Z}\,.$$

Betrachte den inversen Limes

$$(\mathbb{Z}_{[p]}, \mathcal{T}_{[p]}) := \big(\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/_{p^n\mathbb{Z}}, \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_{dis}\big)\,.$$

Sei d_n die diskrete Metrik $\mathbb{Z}/_{p^n\mathbb{Z}}$, d.h.

$$d_n\big([x]_{p^n\mathbb{Z}}, [y]_{p^n\mathbb{Z}}\big) := \begin{cases} 0\,, & [x]_{p^n\mathbb{Z}} = [y]_{p^n\mathbb{Z}} \\ 1\,, & [x]_{p^n\mathbb{Z}} \neq [y]_{p^n\mathbb{Z}} \end{cases}, \quad x, y \in \mathbb{Z}\,,$$

und setze

$$d_{[p]}(x,y) := \max_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{p^{n-1}} d_n\big(\tilde{\pi}_n(x), \tilde{\pi}_n(y)\big), \quad x, y \in \mathbb{Z}_{[p]}\,.$$

32. (a) Zeige, dass die Metrik $d_{[p]}$ auf $\mathbb{Z}_{[p]}$ die Topologie $\mathcal{T}_{[p]}$ induziert.
    (b) Zeige mit Hilfe des Satzes von Tychonoff, dass der Raum $(\mathbb{Z}_{[p]}, \mathcal{T}_{[p]})$ kompakt ist.

33. Zeige:
    (a) Der metrische Raum $(\mathbb{Z}_{[p]}, d_{[p]})$ ist vollständig.
    (b) Für $x, y \in \mathbb{Z}$ sei $d_{(p)}(x,y)$ die durch die gleiche Formel wie in der ersten Übung definierte Metrik. Finde eine isometrische Abbildung von $(\mathbb{Z}, d_{(p)})$ auf eine dichte Teilmenge von $(\mathbb{Z}_{[p]}, d_{[p]})$.

Der Quotientenkörper von $\mathbb{Z}_{[p]}$ heißt der Körper der p-adischen Zahlen und spielt eine wichtige Rolle in der Zahlentheorie.

34. Sei $(I, \preceq)$ eine gerichtete Menge und $(f_i)_{i\in I}$ ein Netz von Funktionen $f_i : [0,1] \to [0,1]$. Das Netz $(f_i)_{i\in I}$ heisst monoton wachsend, wenn

$$i \preceq j \Rightarrow \Big(f_i(x) \leq f_j(x),\ x \in [0,1]\Big)\,.$$

    Zeige, dass für jedes monoton wachsende Netz von Funktionen $f_i : [0,1] \to [0,1]$ der Grenzwert $\lim_{i\in I} f_i$ punktweise existiert, und dass

$$\lim_{i\in I} f_i(x) = \sup_{i\in I} f_i(x)\,.$$

35. Finde eine gerichtete Menge $(I, \preceq)$ und ein monoton wachsendes Netz $(f_i)_{i\in I}$ von (Lebesgue-) messbaren Funktionen $f_i : [0,1] \to [0,1]$, sodass (λ bezeichnet das Lebesguemass)

$$\int_{[0,1]} f_i\, d\lambda = 0,\ i \in I \quad \text{aber} \quad \int_{[0,1]} \lim_{i\in I} f_i\, d\lambda = 1\,.$$

    Kann man so ein Beispiel auch mit der Indexmenge $(\mathbb{N}, \leq)$ konstruieren?

36. Wir betrachten die folgende Aussage: *Für jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stetiger Funktionen $f_n : [0,1] \to [0,1]$ die punktweise gegen 0 konvergiert, gilt* $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = 0$.
    (a) Beweise diese Aussage.
    (b) Versuche diese Aussage ohne Verwendung von Begriffen und Sätzen aus der Masstheorie, d.h., unter Zugrundelegung des Riemannschen Integralbegriffes, zu beweisen[1].

[1] Nicht zu hartnäckig probieren.

[§] Wenn nicht explizit etwas anderes gesagt wird, sind in Hinweisen angegebenen Aussagen zu beweisen (falls sie verwendet werden und falls sie nicht ohnehin Sätze aus Vorlesung oder Übung sind).