

# Übung zu Analysis 3 (WS 2014/15)

## 4. Übung (3.11.2014)

28. Finde eine Basis der von der  $p$ -adischen Metrik  $d_{(p)}$  auf  $\mathbb{N}_0$  induzierten Topologie welche aus Mengen besteht die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind. Bestimme alle zusammenhängenden Teilmengen von  $(\mathbb{N}_0, d_{(p)})$ .

Hinweis: In jedem metrischen Raum bildet die Menge aller Kugeln eine Basis.

29. Kann man für den topologischen Raum  $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$  (wobei  $\mathcal{E}$  die euklidische Topologie ist) eine Basis aus gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Mengen finden? Falls ja, finde eine. Falls nein, beweise dies.

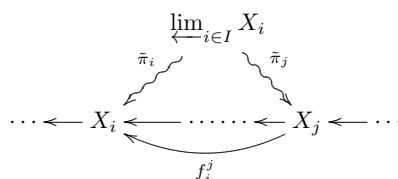
Sei  $(I, \preceq)$  eine gerichtete Menge und sei  $(X_i, \mathcal{T}_i)$ ,  $i \in I$ , eine Familie topologischer Räume. Für je zwei Indices  $i, j \in I$  mit  $i \preceq j$  sei  $f_i^j : X_j \rightarrow X_i$  eine stetige Abbildung, sodass  $f_i^i = \text{id}_{X_i}$ ,  $i \in I$ , und  $f_i^k \circ f_k^j = f_i^j$ ,  $i \preceq k \preceq j$ .

Bezeichne mit  $\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$ ,  $j \in I$ , die kanonische Projektion des direkten Produktes auf seine  $j$ -te Komponente. Wir definieren nun

$$\varprojlim_{i \in I} X_i := \left\{ (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i : f_i^j(x_j) = x_i, i \preceq j \right\}.$$

Bezeichne mit  $\tilde{\pi}_j$  die Einschränkung von  $\pi_j$  auf  $\varprojlim_{i \in I} X_i$ , und mit  $\varprojlim_{i \in I} \mathcal{T}_i$  die initiale Topologie auf  $\varprojlim_{i \in I} X_i$  bezüglich der Familie  $\{\tilde{\pi}_i : i \in I\}$  von Abbildungen.

Man bezeichnet  $(\varprojlim_{i \in I} X_i, \varprojlim_{i \in I} \mathcal{T}_i, \tilde{\pi}_i)$  auch als den inversen Limes der Familie  $\langle (X_i, \mathcal{T}_i), f_i^j \rangle$ .



30. Zeige:

(a) Die Topologie  $\varprojlim_{i \in I} \mathcal{T}_i$  ist die Spurtopologie auf  $\varprojlim_{i \in I} X_i$  von der Produkttopologie  $\prod_{i \in I} \mathcal{T}_i$  auf  $\prod_{i \in I} X_i$ .

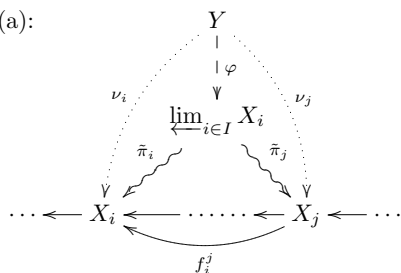
(b) Sind alle Räume  $(X_i, \mathcal{T}_i)$  Hausdorff, so ist  $\varprojlim_{i \in I} X_i$  ein abgeschlossener Teilraum von  $\prod_{i \in I} X_i$ .

31. Zeige:

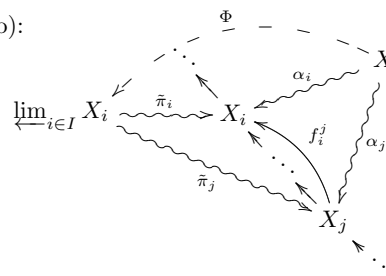
(a) Sei  $(Y, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum gemeinsam mit einer Familie stetiger Abbildungen  $\nu_i : Y \rightarrow X_i$ ,  $i \in I$ , für welche  $f_i^j \circ \nu_j = \nu_i$ ,  $i \preceq j$ , gilt. Dann existiert genau eine  $\mathcal{O}$ - $(\varprojlim_{i \in I} \mathcal{T}_i)$ -stetige Funktion  $\varphi : Y \rightarrow \varprojlim_{i \in I} X_i$ , sodass  $\nu_i = \varphi \circ \tilde{\pi}_i$ ,  $i \in I$ .

(b) Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum gemeinsam mit stetigen Abbildungen  $\alpha_i : X \rightarrow X_i$ ,  $i \in I$ , mit  $f_i^j \circ \alpha_j = \alpha_i$ ,  $i \preceq j$ . Sei vorausgesetzt dass die universelle Eigenschaft, welche wir im vorigen Punkt für  $(\varprojlim_{i \in I} X_i, \varprojlim_{i \in I} \mathcal{T}_i, \tilde{\pi}_i)$  gezeigt haben, für  $(X, \mathcal{T}, \alpha_i)$  gilt. Dann existiert ein Homöomorphismus  $\Phi$  von  $(X, \mathcal{T})$  auf  $(\varprojlim_{i \in I} X_i, \varprojlim_{i \in I} \mathcal{T}_i)$  mit  $\alpha_i = \tilde{\pi}_i \circ \Phi$ ,  $i \in I$ .

Zu (a):



Zu (b):



Sei  $p$  eine Primzahl. Für  $n \in \mathbb{N}_0$  betrachte den topologischen Raum  $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \mathcal{T}_{dis})$  wobei  $\mathcal{T}_{dis}$  die diskrete Topologie ist. Für  $n \leq m$  sei  $f_n^m : \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$  die Abbildung

$$f_n^m([x]_{p^m\mathbb{Z}}) := [x]_{p^n\mathbb{Z}}, \quad x \in \mathbb{Z}.$$

Betrachte den inversen Limes

$$(\mathbb{Z}_{[p]}, \mathcal{T}_{[p]}) := \left( \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_{dis} \right).$$

Sei  $d_n$  die diskrete Metrik  $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ , d.h.

$$d_n([x]_{p^n\mathbb{Z}}, [y]_{p^n\mathbb{Z}}) := \begin{cases} 0, & [x]_{p^n\mathbb{Z}} = [y]_{p^n\mathbb{Z}} \\ 1, & [x]_{p^n\mathbb{Z}} \neq [y]_{p^n\mathbb{Z}} \end{cases}, \quad x, y \in \mathbb{Z},$$

und setze

$$d_{[p]}(x, y) := \max_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{p^{n+1}} d_n(\tilde{\pi}_n(x), \tilde{\pi}_n(y)), \quad x, y \in \mathbb{Z}_{[p]}.$$

32. (a) Zeige, dass die Metrik  $d_{[p]}$  auf  $\mathbb{Z}_{[p]}$  die Topologie  $\mathcal{T}_{[p]}$  induziert.  
 (b) Zeige mit Hilfe des Satzes von Tychonoff, dass der Raum  $(\mathbb{Z}_{[p]}, \mathcal{T}_{[p]})$  kompakt ist.

33. Zeige:

- (a) Der metrische Raum  $(\mathbb{Z}_{[p]}, d_{[p]})$  ist vollständig.  
 (b) Für  $x, y \in \mathbb{Z}$  sei  $d_{(p)}(x, y)$  die durch die gleiche Formel wie in der ersten Übung definierte Metrik. Finde eine isometrische Abbildung von  $(\mathbb{Z}, d_{(p)})$  auf eine dichte Teilmenge von  $(\mathbb{Z}_{[p]}, d_{[p]})$ .

Der Quotientenkörper von  $\mathbb{Z}_{[p]}$  heißt der Körper der  $p$ -adischen Zahlen und spielt eine wichtige Rolle in der Zahlentheorie.

34. Sei  $(I, \preceq)$  eine gerichtete Menge und  $(f_i)_{i \in I}$  ein Netz von Funktionen  $f_i : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . Das Netz  $(f_i)_{i \in I}$  heißt monoton wachsend, wenn

$$i \preceq j \Rightarrow \left( f_i(x) \leq f_j(x), \quad x \in [0, 1] \right).$$

Zeige, dass für jedes monoton wachsende Netz von Funktionen  $f_i : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  der Grenzwert  $\lim_{i \in I} f_i$  punktweise existiert, und dass

$$\lim_{i \in I} f_i(x) = \sup_{i \in I} f_i(x).$$

35. Finde eine gerichtete Menge  $(I, \preceq)$  und ein monoton wachsendes Netz  $(f_i)_{i \in I}$  von (Lebesgue-) messbaren Funktionen  $f_i : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , sodass ( $\lambda$  bezeichnet das Lebesguemaß)

$$\int_{[0,1]} f_i d\lambda = 0, \quad i \in I \quad \text{aber} \quad \int_{[0,1]} \lim_{i \in I} f_i d\lambda = 1.$$

Kann man so ein Beispiel auch mit der Indexmenge  $(\mathbb{N}, \leq)$  konstruieren?

36. Wir betrachten die folgende Aussage: *Für jede Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  stetiger Funktionen  $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  die punktweise gegen 0 konvergiert, gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0$ .*

- (a) Beweise diese Aussage.  
 (b) Versuche diese Aussage ohne Verwendung von Begriffen und Sätzen aus der Masstheorie, d.h., unter Zugrundelegung des Riemannschen Integralbegriffes, zu beweisen<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Nicht zu hartnäckig probieren.

<sup>§</sup>Wenn nicht explizit etwas anderes gesagt wird, sind in Hinweisen angegebenen Aussagen zu beweisen (falls sie verwendet werden und falls sie nicht ohnehin Sätze aus Vorlesung oder Übung sind).