Übungen zu Analysis 3, 4. Übung

1. Zeigen Sie, dass $f(G) \subseteq \mathbb{C}$ offen ist, wenn $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$ ist.

2. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi + \eta + \zeta \\ \xi\eta + \xi\zeta + \eta\zeta \\ \xi\eta\zeta \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass f im Sinne des Umkehrsatzes bei $(x, y, z)^T$ genau dann lokal umkehrbar ist, wenn $(x - y)(y - z)(z - x) \neq 0$. Geben Sie in dem Fall auch die Ableitung der Umkehrfunktion im Punkt $f(x, y, z)^T$ an!

3. Man untersuche bei den folgenden zwei Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, auf welchen möglichst großen, offenen Teilmengen C von $\mathbb{R}^2$ diese einen Diffeomorphismus darstellen. Man gebe zu jedem solchen C auch die Bildmenge D an!

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}, \quad g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}.$$

Weiters gebe man $df(x)$ bzw. $dg(x)$, sowie die Funktionaldeterminanten $\det df(x)$ bzw. $\det dg(x)$ an.

Hinweis: Um welche (bekannten) Funktionen handelt es sich f und g, wenn man $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ identifiziert?

4. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ die Menge aller $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ mit (Affensattel)

$$3z + 3xy^2 - x^3 = 0.$$

Zeigen Sie, dass M eine Mannigfaltigkeit ist! Bestimmen Sie ihre Dimension!

5. Sei M eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$, und sei $O \subseteq M$ offen bzgl. der Spurtopologie. Man zeige, dass O ebenfalls eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$ ist.

Weiters zeige man: Ist $T : O \to P$ ein Diffeomorphismus mit offenen Teilmengen $O, P \subseteq \mathbb{R}^p$, und ist M eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$, sodass $M \subseteq O$, so ist auch $T(M)$ eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$.

6. Man zeige: Ist $M_i, i \in I$, eine Familie von d-dimensionalen Mannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^p$, sodass für jedes $j \in I$, $M_j \cap \overline{\bigcup_{i \neq j} M_i} = \emptyset$, so ist $\bigcup_{i \in I} M_i$ eine Mannigfaltigkeit.

Schließlich gebe man ein Beispiel an, das zeigt, dass obige Voraussetzung notwendig ist; d.h. finden Sie zwei 1-dimensionale Mannigfaltigkeiten M_1, M_2 im $\mathbb{R}^2$, die zwar disjunkt sind, aber nicht $\overline{M_1} \cap M_2 = \emptyset$ erfüllen, und sodass $M_1 \cup M_2$ keine Mannigfaltigkeit ist.

7. Man betrachte den Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aller reellen 2×2-Matrizen, welchen man offensichtlich mit dem $\mathbb{R}^4$ identifizieren kann, indem man eine Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit dem vier-Vektor $(a_1, a_2, a_3, a_4)^T \in \mathbb{R}^4$ identifiziert. Zeigen Sie, dass

$$O(2) = \left\{ T \in \mathbb{R}^{2\times 2} : T \text{ ist eine orthogonale Matrix } \right\}$$

eine Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^4$ ist. Bestimmen Sie die Dimension von $O(2)$.

8. Mit der Notation aus dem letzten Beispiel gebe man irgendeine Einbettung nach $O(2)$ hinein an, die $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in ihrem Bild hat.

   Schließlich gebe an, ob $O(2)$ eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^4$ ist.

   Hinweis für das zweite Problem: Betrachten sie $\det : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$! Welche Werte kann $\det$ auf $O(2)$ annehmen?

9. Sei $T : O \to \mathbb{R}^p$ eine injektive stetig differenzierbare Abbildung mit $d \leq p$ und $O \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, sodass $dT(x)$ immer vollen Rang hat.

   Sei $G \subseteq O$ offen und beschränkt, sodass $\overline{G} \subseteq O$. Man zeige, dass $M := T(G)$ eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

   Hinweis: Man zeige zuerst, dass $T : \overline{G} \to T(\overline{G})$ ein Homöomorphismus ist.

   Bemerkung: Das Bild $T(O)$ ist i.A. keine Mannigfaltigkeit. Um das einzusehen, denke man an das Aussehen der Ziffer 6 als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Diese kann Bild eines offenen Intervalls (a, b) unter einer Abbildung T wie oben geschrieben werden.