Übungen zu Analysis 3, 6. Übung

1. Sei $K = \{(\xi,\eta)^T \in \mathbb{R}^2 : \xi^2 + \eta^2 = 1\}$ und $A = \{(\xi,\eta)^T : 2\xi + 3\eta = 10\}$. Man bestimme $x \in K, y \in A$ mit Hilfe Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren (!!) so, dass $d(x,y) = d(A,K)$. Man zeige, dass x normal auf die Gerade A steht.

2. Seien $a, b, c > 0$ und $K = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1\}$. Bestimmen Sie das Maximum der Volumina von in K enthaltenen Quadren mit achsenparallelen Kanten.

3. Seien $x_1, \dots, x_n$ Winkeln mit $x_j \in (0, 2\pi)$, sodass $x_1 + \cdots + x_n = 2\pi$. Ist nun $P_j = e^{i\sum_{l=1}^{j-1} x_l}$, $j = 1, \dots, n$ (i ist die imaginäre Konstante), so stellt $\overrightarrow{P_1P_2}, \dots, \overrightarrow{P_{n-1}P_n}, \overrightarrow{P_nP_1}$ ein n-Eck dar.

   Man bestimme die Winkel x_j so, dass der Flächeninhalt dieses n-Eckes maximal ist. Man verwende dabei die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren!

4. Sei $O \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $F : O \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, sodass $dF(x) \neq 0$ für alle $x \in M$, wobei $M = \{x \in O : F(x) = 0\}$.

   Gibt es auf M eine überall definierte, stetige Normalenfunktion? Zeigen Sie zunächst, dass $G := \{x \in O : F(x) > 0\}$ und $H := \{x \in O : F(x) < 0\}$ offene Teilmengen von $\mathbb{R}^p$ sind.

   Zeigen Sie nun, dass es für $x \in M$ beliebig nahe an x Punkte aus $G := \{x \in O : F(x) > 0\}$ und Punkte aus $H := \{x \in O : F(x) < 0\}$ gibt, dh. x ist im Abschluss von G und von H.

   Schließlich zeige man, dass $\partial G \cap O = M$ und weiter dass $\partial^s G \cap O = \partial^o G \cap O = M$.

   Hinweis: Was würde zB. aus $U_\epsilon^{\mathbb{R}^p}(x) \subseteq \{x \in O : F(x) \leq 0\}$ mit $F(x) = 0$ für $dF(x)$ folgen?

5. Sei $\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ durch

$$z = re^{i\phi} \mapsto \ln r + i\phi,$$

   definiert, wobei wir den Winkel ϕ in $[0, 2\pi)$ wählen. Man zeige, dass log messbar ist, d.h. dass $\log^{-1}(B)$ für jede Borelmenge in $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ wieder ein Borelmenge ist.

   Hinweis: Man kann zB. mit der Tatsache starten, dass exp eingeschränkt auf die kompakte Menge $[-n, n] \times [0, 2\pi - \frac{1}{n}]$ injektiv und stetig ist.

6. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, und sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar. Man zeige für integrierbare f die Ungleichung

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu.$$

7. Man betrachte

$$f(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} \, dx.$$

Für welche $t \in \mathbb{R}$ existiert dieses Integral als uneigentliche Riemann-Integral und für welche t existiert das entsprechende Lebesgue-Integral?

8. Genauso behandle man

$$g(t) = \int_0^{+\infty} \sin(x^t) \, dx.$$

9. Man zeige, dass für $T \in \mathbb{R}, T > 0$, und für $f \in C^1[-T, T]$ folgt, dass

$$\lim_{x \to \pm\infty} \int_{[-T,T]} f(t) \exp(itx) \, d\lambda(t) = 0.$$