Übungen zu Analysis 3, 8. Übung

1. Man berechne:
$$\int_{[a,b]\times[c,d]} xye^{x^2+y^2}\; d\lambda_2\binom{x}{y},$$
$$\int_{\{\binom{\xi}{\eta}:4\xi^2+\eta^2<4\}} y^2\; d\lambda_2\binom{x}{y},$$
$$\int_G xy\; d\lambda_2\binom{x}{y},$$
wobei G der Bereich ist, der oberhalb von $y = x^2$ und unterhalb von $y = x + 2$ liegt.

2. Sei $f(x) = \mathbb{1}_{[-c,c]}(x)$ mit einem festen $c > 0$ sowie $g(x) = \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x) \cdot exp(-x)$. Berechnen Sie die Faltung $f * g$.

3. Sei $h = \mathbb{1}_{[-1,1]}$ und $g_n = \mathbb{1}_{[-n,n]}$ für $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie $g_n * h$ sowie $(g_n * h) * h$. Sind die erhaltenen Funktionen stetig, differenzierbar, stetig differenzierbar?

4. Lässt sich für $f = \mathbb{1}_{U_1(0)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ($U_1(0)$ ist die offene Einheitskugel in $\mathbb{R}^2$ bzgl. $\|.\|_2$) und $g(x, y) = x^2 + y^2$ die Faltung $f * g$ sinnvoll definieren? Wenn ja, dann berechne man diese!

5. Zeigen Sie, dass $z \mapsto \frac{1}{z},\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $z \mapsto \log z,\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ über jede beschränkte Teilmenge $B \in \mathfrak{B}_2$ von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nach λ_2 integrierbar sind. Dabei sei festgelegt, dass $\log(re^{i\phi}) = \ln r + i\phi$, wobei $r \geq 0, \phi \in [0, 2\pi)$.

   Weiters berechne man
$$\int_{K_\rho(0)\setminus\{0\}} \frac{1}{x+iy}\; d\lambda_2\binom{x}{y}$$
   und
$$\int_{U_\rho(0)^+\setminus\{0\}} \log(x+iy)\; d\lambda_2\binom{x}{y},$$
   wobei $\rho > 0$ und $U_\rho(0)^+ = \{(x, y)^T : x^2 + y^2 < \rho^2, y > 0\}$.

6. Man berechne das λ_2-Maß derjenigen beschränkten ebenen Fläche, deren Rand durch
$$(x^2 + y^2)^3 = 9(x^4 + y^4)$$
   beschrieben wird. Skizze!

   Hinweis: Transformation auf Polarkoordinaten.

7. Man zeige, dass das Volumen des Drehkörpers, der durch Rotation des Flächenstückes ($a < b,\ a, b \in \mathbb{R}$)
$$F = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$$
   um die x-Achse im $\mathbb{R}^3$ entsteht, gleich $\pi \int_{[a,b]} f^2\, d\lambda$ ist.

   Man berechne insbesondere das Volumen des Körpers K, der entsteht, wenn $f(x) = 2 - x,\ 0 \leq x \leq 2$.

8. Für $t > 0$ sei

$$F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \cos x^2 \; dx, \;\; G(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \sin x^2 \; dx.$$

Man zeige $F(t)^2 - G(t)^2 = \frac{\pi}{4} \frac{t}{1+t^2} = t2F(t)G(t)$. Begründen Sie Umformungen und Anwendungen von Resultaten aus der Analysis 3 bzw. Maßtheorie!

Hinweis: Zur Berechnung von $F(t)^2, G(t)^2, F(t)G(t)$ schreiben Sie die beiden Faktoren als Integrale mit verschiedenen Integrationsvariabeln!