Übungen zu Analysis 3, 11. Übung

1. Zeigen Sie, dass Korollar 17.2.7 auch richtig ist, wenn $\lambda_d|_{\mathfrak{B}_d \cap G}$ durch ein beliebiges Borelmaß auf $\mathfrak{B}_d \cap G$ ersetzt wird, welches bei allen $A \in \mathfrak{B}_d \cap G$ mit $\mu(A) < +\infty$ regular ist, dh. $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A, K \text{ kompakt}\}$ sowie $\mu(A) = \inf\{\mu(O) : G \supseteq O \supseteq A, O \text{ offen}\}$.

   Hinweis: Beispiel 8 der 10ten Übung und Bemerkung 15.5.6.

   Anmerkung: Das Lebesguesche Maß ist bei allen Borelteilmengen von G regulär.

2. Sei $f(x)$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte, komplexwertige, messbare Funktion. Wir nehmen an, dass 2π-periodisch ist, dh. $f(x) = f(x + 2\pi)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Man beweise, dass für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ folgende Gleichheit gilt:

$$\int_{[-\pi,\pi]} f \, d\lambda = \int_{[0,2\pi]} f \, d\lambda = \int_{[\alpha,\alpha+2\pi]} f \, d\lambda$$

   in dem Sinne, dass wenn eines dieser Integrale existiert, dann auch die beiden anderen existieren, und dass eben besagte Gleichheit gilt. Weiters zeige man, dass für ungerade ($g(-x) = -g(x)$) integrierbare Funktionen $g : [-b, b] \to \mathbb{C}$ immer $\int_{[-b,b]} f \, d\lambda = 0$, und dass für gerade ($g(-x) = g(x)$) integrierbare Funktionen $g : [-b, b] \to \mathbb{C}$ immer $\int_{[-b,b]} f \, d\lambda = 2 \int_{[0,b]} f \, d\lambda$.

3. Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x$. Man berechne die Fourierreihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} (f, e_n)e_n$ von f bzgl. des ONS $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $e_n(x) = \exp(inx)$ in dem Hilbertraum $L^2([-\pi, \pi], \mathfrak{B} \cap [-\pi, \pi], \frac{1}{2\pi}\lambda, \mathbb{C})$; vgl. Definition 17.3.9!

   Anmerkung: Gemäß 17.4.1 ist $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis, womit die Fourierreihe ($\sum_{n\in\mathbb{Z}}$ ist hier so zu interpretieren, dass für n in der Reihenfolge $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$ aufsummiert wird.) bzgl. der von $(.,.)$ erzeugten Norm konvergiert.

4. Man berechne die Fourierreihe von $f(x) = \frac{1}{2-e^{ix}}, \ x \in [-\pi, \pi]$ wie im vorherigen Beispiel. Konvergiert diese punktweise oder gar gleichmäßig und wogegen?

   Hinweis: Stellen Sie zuerst f als geometrische Reihe dar!

5. Man berechne die Fourierreihe von $f : x \mapsto \cos \alpha x, \ x \in [-\pi, \pi]$ für ein festes $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ wie in Beispiel 3.

6. Zeigen Sie, dass in $L^2([-\pi, \pi], \mathfrak{B} \cap [-\pi, \pi], \frac{1}{2\pi}\lambda, \mathbb{C})$

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \dots$$

   ein Orthogonalsystem abgibt. Wie muss man diese Funktionen skalieren, um ein Orthonormalsystem (f_n) zu erhalten? Diskutieren Sie auch den Zusammenhang der Fourierreihe bzgl. dieses Orthonormalsystems und des Orthonormalsystems aus dem 2ten Beispiel. Schließlich gebe man die Fourierreihe bzgl. (f_n) für die Funktion aus dem 3ten Beispiel an!

7. Sei $f \in L^2([-\pi,\pi], \mathfrak{B} \cap [-\pi,\pi], \frac{1}{2\pi}\lambda, \mathbb{C})$ ungerade ($f(-x) = -f(x)$). Zeigen Sie, dass dann in der Fourierreihe von f bzgl. der Fourierreihe (f_n) aus dem vorherigen Beispiel nur $\sin mx$ Terme auftreten!

   Betrachten Sie konkret $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, wobei $f(x) = 1 - x^2$ für $x \in (0,\pi]$ zu einer ungeraden Funktion auf $[-\pi,\pi]$ forgesetzt wird, und berechnen Sie die entsprechende Fourierreihe.

8. Sie $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derart, dass ψ auf $[0,\frac{1}{2})$ den Wert 1 und auf $(\frac{1}{2},1]$ den Wert -1 annimmt; bei $\frac{1}{2}$ und ausserhalb von $[0,1]$ sei sie Null. Nun setze für $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $0 \leq k < 2^j$

   $$\psi_{j,k}(x) = \psi(2^j x - k), \quad x \in [0,1]\,.$$

   Zeigen Sie, dass $\{\psi_{j,k} : j \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ 0 \leq k < 2^j\}$ (Haarsche Funktionen) ein Orthogonalsystem auf $L^2[0,1]$ ist!

   Hinweis: Skizzieren Sie die Funktionen.