Übungen zu Analysis 3, 12. Übung

1. Die Einschränkung der Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ aus Beispiel 3 der elften Übung auf $[-\pi, +\pi)$ setze man 2π-periodisch auf $\mathbb{R}$ fort. Geben Sie an, wogegen die Fourierreihe dieser Funktion punktweise, also für ein beliebiges aber festes $x \in \mathbb{R}$, konvergiert! (Vergessen Sie nicht die Punkte $x \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$)

   Machen Sie dasselbe mit der der Funktion aus Beispiel 5 der elften Übung.

2. Die Einschränkung der Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ aus Beispiel 7 der elften Übung auf $[-\pi, +\pi)$ setze man 2π-periodisch auf $\mathbb{R}$ fort. Geben Sie an, wogegen die Fourierreihe dieser Funktion punktweise, also für ein beliebiges aber festes $x \in \mathbb{R}$, konvergiert!

   Weiters gebe man diese Fourierreihe in der Form $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ an, dh. wie schauen die a_n und b_n aus?

3. Entwickeln Sie $f(x) = x^3,\ x \in [0, \pi]$ in eine Cosinusreihe, und geben Sie an, wo auf $[0, \pi]$ und wogegen diese punktweise konvergiert. Setzen Sie dazu f auf $[-\pi, +\pi]$ zu einer geraden Funktion fort, und entwickeln Sie diese Fortsetzung in eine Fourierreihe der Form $c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx+b_n \sin nx)$.

4. Man entwickle $x \mapsto x \sin \pi x,\ x \in [-1, 1]$ in eine Fourierreihe der Form
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \exp(in\pi x)$$
   bzw.
$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\pi x + b_k \sin k\pi x)\ .$$
   Geben Sie an, wohin die Fourierreihe punktweise konvergiert!

5. Sei $f(z)$ die Grenzfunktion einer Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_n z^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$. Für ein $0 < r < R$ entwickle man $t \mapsto f(re^{it})$ in eine Fourierreihe der Form $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ und in eine Fourierreihe der Form $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$. Man gebe auch an, wohin gegen und warum diese Reihen punktweise konvergieren!

   Schließlich, bestimme man auch die Fourierreihen zu den Funktionen $t \mapsto \operatorname{Re} f(re^{it})$ und $t \mapsto \operatorname{Im} f(re^{it})$, wobei man hier $\gamma_n \in \mathbb{R}$ annehme.

6. Für $f \in L^1(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger zeige man, dass sich $\hat{f}$ zu einer auf ganz $\mathbb{C}$ definierten und holomorphen Funktion fortsetzen lässt!

7. Sei $f(t) = \exp(-|t|)$. Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{f}(\zeta)$.

   Weiters bestimme man $[\widehat{|t|e^{-|t|}}](\zeta)$ sowie $[\widehat{te^{-|t|}}](\zeta)$.

   Hinweis: Vielleicht ist Proposition 18.1.2 hilfreich!

8. Man berechne die Fouriertransformierte von $f(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}$ und bestimme daraus die Fouriertransformierte von $\operatorname{sgn}(x)e^{-|x|}$.

   Hinweis: Vielleicht ist Proposition 18.1.2 hilfreich!

9. Man bestimme die Fouriertransformierte von $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sowie von $\frac{4}{3+2x+x^2}$.
Hinweis für die zweite Funktion verwende Proposition 18.1.2.