

4. Übungsblatt (Dienstag 03/06/2014)

1. Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \cos x$$

auf dem Intervall $[0, \pi]$. Führen Sie händisch eine Polynominterpolation $p(x)$ durch und geben Sie jeweils den Fehler $f(x) - p(x)$ an der Stelle $\frac{\pi}{5}$ an (dafür ist der Computer erlaubt):

- (a) Polynom vom Grad 1: $x_0 = 0, x_1 = \pi$
 - (b) Polynom vom Grad 2: $x_0, x_1, x_2 = \frac{\pi}{2}$
 - (c) Polynom vom Grad 3: $x_0, x_1, x_2, x_3 = \frac{\pi}{4}$ und $x_0, x_1, x_2, x_3 = \frac{3\pi}{4}$
 - (d) Theoretische Abschätzung des Interpolationsfehlers für (c) an der Stelle $\frac{\pi}{5}$
 - (e) Welchen Vorteil bietet die Newtondarstellung des Interpolationspolynoms?
 - (f) gerades Polynom 4. Grades durch x_0, x_1, x_2 und vergleichen Sie den Fehler bei $\frac{\pi}{5}$ mit dem Fehler beim Polynom vom Grad 2. Warum ist hier die Wahl eines geraden Polynoms sinnvoll?
2. Bestimmen Sie näherungsweise die Ableitung der Funktion $f(x) = x \sin x$, indem Sie 5 Werte für h (etwa 0.01, 0.005, 0.001, 0.0005, 0.0001) wählen und für die Ableitung von f das Interpolationspolynom durch diese Werte bei 0 auswerten. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den Ergebnissen bei Berechnung mit dem einseitigen und dem zentralen Differenzenquotienten.

3. Berechnen Sie händisch das Hermitsche Interpolationspolynom zu den Stützstellen

$$f(1) = 2, \quad f'(1) = 1, \quad f(4) = 3, \quad f'(4) = 2 \quad f''(4) = 1$$

4. Interpolieren Sie mithilfe von MATLAB die Funktion von Runge

$$f(x) = \frac{1}{25x^2 + 1}$$

auf $[-1, 1]$ auf zwei Arten für $n = 20$:

- (a) Äquidistanten Punkten $x_j = -1 + \frac{2j}{n} \quad j = 0, 1, \dots, n$
 - (b) An den Nullstellen des $n + 1$ -ten Tschebyscheff Polynoms T_{n+1}
5. Approximieren Sie händisch die Funktion $f(x) = \log_2(x)$.
- (a) Berechnen Sie das Interpolationspolynom zu $f(x)$ mit den Stützstellen 16, 32 und 64.
 - (b) Bestimmen Sie die lineare Ausgleichsgerade zu diesen Stützstellen (siehe Kapitel 2) und vergleichen Sie sie mit dem Interpolationspolynom aus (a).
6. Gegeben sind die vier Stützpunkte $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(3, 2)$ und $(7, 0)$. Bestimmen Sie mit Hilfe von MATLAB ein interpolierendes Polynom $p(x)$ sowie die Funktionswerte $p(0.5)$, $p(2.5)$ und $p(6.5)$. Zeichnen Sie unter Verwendung von MATLAB die Stützpunkte und $p(x)$ im Intervall $[0, 7]$.
7. Der Interpolationsfehler an einer Stelle \bar{x} hängt stark von der Funktion $\omega(\bar{x}) = |(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1) \dots (\bar{x} - x_n)|$ ab. Für $x_0 = 0$ und $x_2 = 1$ mit $n = 2$ soll eine Zwischenstelle x_1 bestimmt werden, so dass $\max_{0 \leq \bar{x} \leq 1} \omega(\bar{x})$ minimal wird.

8. Betrachten Sie ein einfaches Approximationsproblem in anderen Normen: Es soll diejenige Gerade $y(x) = ax + b$ bestimmt werden, die von den Punkten $(0, 0)$, $(1, 1)$ und $(0.5, 0.25)$ den kleinsten Abstand in der Maximumsnorm

$$\min_{a,b} \{ \max \{ |b|, |a + b - 1|, |0.5a + b - 0.25| \} \},$$

und in der 1-Norm hat

$$\min_{a,b} \{ |b| + |a + b - 1| + |0.5a + b - 0.25| \}.$$

Man kann jeweils durch eine Fallunterscheidung die optimalen Werte für a und b bestimmen. Eine graphische Überlegung könnte auch hilfreich sein.