Serie 5

Besprechung: Woche von Montag, 8.4.2019

5.1. **a)** Schreiben Sie eine Routine mit Signatur $y = \texttt{composite\_gauss}(n, L, q)$, welche eine summierte Gaussregel für die Quadratur auf $(0, 1)$ ist. Es werde die (entsprechend skalierte) Gaußregel mit n Punkten für jedes der L Teilintervalle verwendet, wobei die Teilintervalle gegeben sind durch

$$(0, q^{L-1}), (q^{L-1}, q^{L-2}), (q^{L-2}, q^{L-3}) \cdots, (q, 1)$$

Testen Sie Ihr Programm mit $f(x) = x^m$, $m = 0, 1, 2$. *Hinweis:* die Gausspunkte und -gewichte liefert `numpy.polynomial.legendre.leggauss` bzw. `gauleg.m` (siehe homepage).

b) Verwenden Sie für $n = L = 1, \ldots, 20$ die Routine `composite_gauss` für $q = 0.5$, $q = 0.15$ und $q = 0.05$ und den Integranden

$$f(x) = x^{0.1} \log x$$

(mit "exaktem" Integralwert $-0.8264462809917355371900826446281$). Plotten Sie semilogarithmisch (`semilogy`) den Quadraturfehler gegen n für diese 3 Werte von q. Welche Wahl ist die beste?

c) Fitten Sie (unter Zuhilfenahme von `polyfit`) Ihre Fehlerkurven an ein Gesetz der Form Ce^{-bn}.

5.2. Geben Sie eine Fehlerschranke an für den Gaußquadraturfehler

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)\, dx - Q_n^{Gauss}(f) \right| \qquad \text{mit } f(x) = (4 - x^2)^{-1}.$$

5.3. Zeigen Sie, daß die summierte Trapezregel exakt ist für die Auswertung von $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\, dx$.

Hinweis: Mit der imaginären Einheit $\mathbf{i}$ dürfen Sie die folgenden Formeln verwenden:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \exp(\pm \mathbf{i} j h) = 0 \quad \text{mit} \quad h = \frac{2\pi}{N}, \qquad \sin x = \frac{\exp(\mathbf{i}x) - \exp(-\mathbf{i}x)}{2\mathbf{i}}$$

(*Bemerkung:* ähnliches gilt auch für $\sin(mx)$ und $\cos(mx)$, wenn h klein ist.)

5.4. (Transformationstechnik) Es soll eine Quadraturformel für das Integral

$$\int_1^\infty f(x)\, dx$$

erzeugt werden. Betrachten Sie konkret $f(x) = \log x/(x^\pi)$ mit

$$\int_1^\infty \frac{\log x}{x^\pi}\, dx = \frac{1}{\pi^2 - 2\pi + 1}.$$

a) Eine Möglichkeit ist, das Integral durch eine geeignete Variablensubstitution in ein Integral auf $(0, 1)$ zu überführen. Geben Sie eine solche an. Für das transformierte Problem kann die Quadraturformel aus Aufg. 5.1 verwendet werden.

b) Eine weitere Möglichkeit ist, die Substitution $x = e^y$ zu machen. Man erhält ein Integral

$$\int_{y=0}^{\infty} F(y)\, dy,$$

bei dem der Integrand schnell abklingt, so daß man das Integral $\int_{y=0}^{\infty} F(y)\, dy$ durch $\int_{y=0}^{L} F(y)\, dy$ gut approximieren kann. Man kann dann das Integral wieder durch eine summierte Gaußregel mit n Punkten pro Teilintervall approximieren, wobei die L Teilintervalle gegeben sind durch

$$(0, Lq^{L-1}), (Lq^{L-1}, Lq^{L-2}), \cdots, (Lq, L)$$

Erzeugen Sie die summierte Quadraturformel mittels Ihres Programms aus Aufg. 5.1.

c) Erzeugen Sie einen Fehlerplot (`semilogy`) für die beiden Verfahren mit $n = L = 1, \ldots, 20$. Wählen Sie $q = 0.15$.