Serie 6

Besprechung: Woche von Montag, 29.4.2019

6.1. Betrachten Sie die Quadraturformeln Q^{2D} auf dem Viereck $S = [0,1]^2$.

a) Zeigen Sie: die Mittelpunktsregel $Q(F) = F(0.5, 0.5)$ ist exakt für Polynome der Bauart $F(x,y) = a + bx + cy$.

b) Geben Sie eine Quadraturformel Q^{2D} an, die zu gegebenem $p \in \mathbb{N}_0$ Polynome von der Bauart $F(x,y) = \sum_{i,j=0}^{p} a_{ij} x^i y^j$ exakt integriert.

6.2. Entwickeln Sie einen adaptiven Algorithmus zur Integration von Funktionen auf Rechtecken $[a_x, b_x] \times [a_y, b_y]$. Basieren Sie Ihren Algorithmus auf die Mittelpunktsregel, d.h. $Q_{[a,b]\times[c,d]}(f) = (b-a)(d-c)f((a+c)/2,(b+d)/2)$. *Hinweis:* Versuchen Sie, die Ideen des 1D-adaptiven Algorithmus aus Aufg. 4.4 zu übertragen. Testen Sie Ihren adaptiven Algorithmus für die Quadratur auf $[0,1]^2$ und die Integranden

$$f_1(x,y) = x^2 \qquad \text{und} \qquad f_2(x,y) = \begin{cases} 0 & x < y \\ 1 & x \geq y \end{cases}$$

indem Sie ihn mit Toleranz $\tau = 2^{-i}$, $i = 0, \ldots, 15$ aufrufen und die Konvergenz (Quadraturfehler gegen Toleranz) doppelt logarithmisch plotten.

6.3. Betrachten Sie die Funktion

$$\varphi(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

a) Ist die Auswertung für große x gut konditioniert? (relative Kondition)

b) Formulieren Sie eine stabile numerische Realisierung von φ (*Hinweis:* Sie dürfen verwenden, daß es eine stabile Realisierung von $\sqrt{\cdot}$ gibt.)

6.4. Die Zahl π kann iterativ über die Folge

$$u_1 := 2, \qquad u_{k+1} = 2^k \sqrt{2\left(1 - \sqrt{1 - (2^{-k}u_k)^2}\right)} \tag{1}$$

bestimmt werden.

a) Berechnen Sie (in `matlab`/`python`) die ersten 30 Folgenglieder und den absoluten Fehler $|\pi - u_k|$. Was ist der minimal erreichbare Fehler?

b) Erklären Sie, warum Sie erwarten, daß der Fehler ab einem gewissen k_0 wachsen sollte. *Zusatzaufgabe:* Überlegen Sie sich, daß der kleinste erreichbare Fehler bei ungefähr $k = 17$ erreicht wird, wenn Sie annehmen, daß bei exakter Arithmetik für den Fehler gilt: $|u_k - \pi| \approx 2^{-2k}$.

6.5. (Aitken Δ^2-Extrapolation)

a) Das Aitkensche Δ^2-Verfahren kann eingesetzt werden, um die Konvergenz einer Folge $(x_n)_n$ gegen ihren Grenzwert $x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n$ zu beschleunigen. Nehmen Sie hierzu an, daß die Folge dem Bildungsgesetz

$$x_n = x_\infty + Cq^n \tag{2}$$

mit (unbekanntem) x_∞, C, $q \in (0,1)$ genügt. Bestimmen Sie eine Formel, die aus 3 aufeinanderfolgenden Folgengliedern x_n, x_{n+1}, x_{n+2} den Wert x_∞ "extrapoliert", indem Sie annehmen, daß alle 3 Werte die Gleichung (2) erfüllen. Dieses Vorgehen (für jedes n) liefert dann die Glieder einer neuen Folge $\widetilde{x}_n$, die (manchmal) schneller gegen $\lim_{n\to\infty} x_n$ konvergiert. Verwenden Sie deshalb Ihre Formel, um aus der Folge $(u_k)_k$ aus Aufg. 6.4 eine Folge von verbesserten Approximationen an π zu erhalten. Welche Genauigkeit können Sie nun erreichen?

b) Können Sie ohne Kenntnis des exakten Grenzwertes π der Folge $(u_k)_k$ den Fehler schätzen? Können Sie damit ein sinnvolles Kriterium angeben, wann Sie die Iteration (1) abbrechen sollten?