Serie 8

Besprechung: Woche von Montag, 13.5.2019

8.1. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Tridiagonalmatrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & e_1 & & & \\ c_2 & d_2 & e_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & e_{n-1} \\ & & & c_n & d_n \end{pmatrix}$$

Es möge die reguläre Matrix A eine LU-Zerlegung haben.

a) Zeigen Sie: die Faktoren L und U haben die Form

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_2 & 1 & & & \\ & l_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & l_n & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} u_1 & e_1 & & & \\ & u_2 & e_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & e_{n-1} \\ & & & & u_n \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie u_1. Geben Sie einen Algorithmus an, der die l_i und die u_i für $i = 2, \dots, n$ bestimmt.

8.2. An einem Quader werden die Längen der Kanten und die Umfänge senkrecht zur ersten und zweiten Kante gemessen. Die Meßwerte sind:

Kante 1: $26mm$, Kante 2: $38mm$, Kante 3: $55mm$
Umfang $\perp$ Kante 1: $188mm$, Umfang $\perp$ Kante 2: $163mm$.

Bestimmen Sie die Kantenlängen mittels der Methode der kleinsten Quadrate.

8.3. Die Funktion $f(x) = \sin x$ soll durch ein Polynom der Bauart $\pi(x) = a_1 x + a_3 x^3$ approximiert werden. Dabei sollen die Koeffizienten a_1, a_3 mittels Ausgleichsrechnung bestimmt werden, indem man $\sum_{j=0}^{m} (\pi(x_j) - f(x_j))^2$ minimiert, wobei $x_0, \dots, x_m$ gegeben Punkte sind. Stellen Sie das Ausgleichsproblem auf. Programmieren Sie die Bestimmung der Koeffizienten a_1, a_3 für folgende Wahl der Stützstellen x_j: N zufällig ausgewählte Punkte im Intervall $[-1/N, 1/N]$ für $N = 2^{-n}$, $n = 2, \dots, 10$. Konvergieren Ihre Werte a_1, a_3? Welchen Grenzwert erwarten Sie?

8.4. Die Methode der kleinsten Fehlerquadrate ist auch zum Bestimmen von Parametern von manchen nichtlinearen Gesetzen einsetzbar. Überlegen Sie sich, wie Sie aus Meßdaten (t_i, y_i), $i = 1, \dots, N$ die Parameter k, C aus dem Gesetz $y(t) = Ce^{-kt}$ bestimmen können. Wie können Sie bei einem Gesetz $y(t) = Ct^{\alpha}$ vorgehen, um C und α zu bestimmen?

8.5. Sei $\mathbf{Q}$ eine orthogonale Matrix. Zeigen Sie:

a) $\mathbf{x}^{\top}\mathbf{y} = ((\mathbf{Q})\mathbf{x})^{\top}(\mathbf{Q}\mathbf{y})$ für alle $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

b) Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m > n$ und ihre QR-Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$. Zeigen Sie: Falls $\mathbf{A}$ vollen Rang hat (d.h., $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = n$), dann sind die Diagonalelemente von $\mathbf{R}$ ungleich Null. Zeigen Sie, daß dann die ersten n Spalten von $\mathbf{Q}$ eine Orthonormalbasis des Bildraums von $\mathbf{A}$ ist.