Übungsblatt 1

Diskussion des Blattes: Fr., 14.3.2014

1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ konvexes (oder glatt berandetes) Gebiet. Sei $X := L^2(\Omega)$ und $Y := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ (versehen mit der $H^2(\Omega)$-Norm) und $B(u, v) := \int_\Omega u \Delta v$.

a) Zeigen Sie, daß die Bilinearform B die inf-sup Bedingung erfüllt. Zeigen Sie, daß es für jedes $l \in Y'$ eine eindeutige Lösung u von $B(u, v) = l(v)$ für alle $v \in Y$ gibt.

b) Betrachten Sie folgendes Dirichletproblem:

$$-\Delta u = f \quad \text{auf } \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} = u_0.$$

Geben Sie eine Variationsformulierung basierend auf der Bilinearform B an, die von u erfüllt wird (falls u als hinreichend glatt angenommen wird).

c) Zeigen Sie, daß für jedes $x_0 \in \Omega$ durch $l(v) := v(x_0)$ ein Element aus Y' definiert ist.

d) Zeigen Sie: Es existiert eine Funktion $G : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ ("Greensche Funktion"), so daß für jedes $f \in C(\overline{\Omega})$ die eindeutige variationelle Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von $-\Delta u = f$ die folgende Darstellung hat:

$$u(x_0) = \int_\Omega G(x, x_0) f(x)\, dx \qquad \forall x_0 \in \Omega.$$

Bemerkung: Die Bedingung "Ω konvex oder glatt berandet" ist notwendig für die inf-sup Bedingung. Genauer: die aus dem H^1-setting vertraute *eindeutige* Lösbarkeit für das Poissonproblem (mit homogenen Randbedingungen) gilt nicht in L^2. Hierzu: Betrachte den Sektor (in Polarkoordinaten) $\Omega = \{(r, \varphi) \,|\, 0 < r < 1, 0 < \varphi < \omega\}$ mit $\omega \in (\pi, 2\pi)$ und die beiden (harmonischen) Funktionen

$$u_1(r, \varphi) = r^{\pi/\omega} \sin \frac{\pi}{\omega}\varphi, \qquad u_2(r, \varphi) = r^{-\pi/\omega} \sin \frac{\pi}{\omega}\varphi.$$

Die beiden Funktionen sind harmonisch und haben die gleichen Randwerte, und $u_1 \in H^1$ und $u_2 \in L^2 \backslash H^1$. Insbesondere ist die Differenz $0 \neq \delta := u_1 - u_2 \in L^2$ harmonisch und hat verschwindende Randwerte.

2. Beim Stokesproblem aus der VO wurde $X_N \subset (H_0^1(\Omega))^2$ und $M_N \subset L_0^2(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega) \,|\, \int_\Omega p = 0\}$ als Räume von stückweise Polynomen gewählt. Während geeignete Basen von X_N zur Verfügung stehen, ist eine praktikable Basis von M_N wegen der Nebenbedingung des verschwindenden Mittelwertes des Druckes p typischerweise nicht einfach zu finden. Entwickeln Sie eine FEM-Formulierung, bei der Sie mit den "Standardbasen" von FEM-Räumen arbeiten können.

3. Betrachten Sie das Randwertproblem ("biharmonische Gleichung")

$$\Delta^2 u := \Delta(\Delta u) = f \quad \text{auf } \Omega, \qquad u = \partial_n u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{1}$$

Zeigen Sie: eine klassische (d.h. hinreichend glatte) Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ erfüllt folgendes Sattelpunktproblem für eine geeignete Funktion $\sigma \in H^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} -(\sigma, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla v, \nabla u)_{L^2(\Omega)} &= 0 \qquad \forall v \in H^1(\Omega) \\ (\nabla \sigma, \nabla w)_{L^2(\Omega)} &= (f, w)_{L^2(\Omega)} \qquad \forall w \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß diese Sattelpunktformulierung die inf-sup Bedingung auf $H_0^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ erfüllt. Wie würden Sie diskretisieren? Welche Konvergenzraten erwarten Sie?

4. Auf Blatt 7 im letzten Semester haben wir den "Nitschetrick" kennengelernt, um L^2-Abschätzungen zu beweisen. Verwenden Sie diesen Trick, um eine L^2-Abschätzung für den Fehler $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\|_{L^2(\Omega)}$ zu beweisen. Nehmen Sie an hierzu an, daß das Stokesproblem folgende Regularitätsaussage ("shift theorem") erfüllt [1] Für $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)$ erfüllt die Lösung $(\mathbf{w}, q)$ von

$$-\Delta \mathbf{w} + \nabla q = \mathbf{f} \quad \text{auf } \Omega, \qquad \nabla \cdot \mathbf{w} = 0 \quad \text{auf } \Omega, \qquad \mathbf{w}|_{\partial\Omega} = 0$$

die Abschätzung

$$\|\mathbf{w}\|_{H^2(\Omega)} + \|q\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}$$

Sei $\mathbf{u}_N \in X_N$ und $p_N \in M_N$ die FEM-Approximation an die exakte Lösung $(\mathbf{u}, p)$, wobei das Paar X_N, M_N die Approximationseigenschaft $(S_0^{1,1}(\mathcal{T}))^2 \subset X_N$ und $S^{0,0}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega) \subset M_N$. Dann gilt:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \left[\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\|_{H^1(\Omega)} + \|p - p_N\|_{L^2(\Omega)} \right]$$

Hinweis: Sie dürfen die folgenden Approximationseigenschaften verwenden:

$$\begin{aligned} \inf_{v \in X_N} \|\mathbf{z} - v\|_{H^1(\Omega)} &\leq Ch \|\mathbf{z}\|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall \mathbf{z} \in (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))^2, \\ \inf_{v \in M_N} \|\psi - v\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch \|\psi\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall \psi \in L_0^2(\Omega) \cap H^1(\Omega). \end{aligned}$$

[1] das gilt natürlich nicht immer...aber konvexe Gebiete oder glatt berandete Gebiete tun uns den Gefallen