Übungsblatt 10

Diskussion des Blattes: Fr., 6.6.2014

1. **a)** Seien A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalisierbar und der Kommutator $[A,B]=0$. Dann sind sie simultan diagonalisierbar. Zeigen Sie diese Aussage unter der restriktiveren Annahme, daß die Eigenwerte von A paarweise verschieden sind.

b) Mögen A, B simultan diagonalisierbar sein. Zeigen Sie:

$$e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB} = e^{tB}e^{tA}$$

2. **a)** Für die 1D Advektionsgleichung

$$u_t + au_x = 0$$

ist das Lax-Friedrichs-Verfahren gegeben durch

$$\frac{1}{k}\left(u_i^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)\right) + \frac{a}{2h}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) = 0$$

Zeigen Sie mittels der von Neumann-Analyse, daß das Verfahren stabil ist unter der CFL-Bedingung

$$\frac{|a|k}{h} \leq 1. \tag{1}$$

b) Die Verallgemeinerung auf die 2D-Gleichung $u_t + au_x + bu_y = 0$ ist

$$\frac{1}{k}\left(u_{i,j}^{n+1} - \frac{1}{4}(u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n)\right) + \frac{a}{2h}\left(u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n\right) + \frac{b}{2h}\left(u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n\right) = 0$$

Überlegen Sie sich, wie Sie die Fourieranalyse aus dem 1D Fall in den 2D-Fall übertragen können. Zeigen Sie, daß eine hinreichende Bedingung für Stabilität im 2D Fall die Bedingung

$$\left(\frac{k}{h}\right)^2 \left(a^2 + b^2\right) \leq \frac{1}{2} \tag{2}$$

ist.

c) Die 2D CFL-Bedingung (2) ist restriktiver als die 1D-Bedingung (1). Zeigen Sie, daß das Upwind Splitting-Verfahren, basierend auf dem Splitting $Au = au_x$ und $Bu = bu_y$ die CFL-Bedingung

$$\max\left\{\frac{|a|k}{h}, \frac{|b|k}{h}\right\} \leq 1$$

hat, was weniger stringent ist als (2).

3. Betrachten Sie die "kubische Schrödingergleichung"

$$u_t = \mathbf{i}(u_{xx} + |u|^2 u), \qquad u(\cdot, 0) = u_0,$$

wobei u komplexwertig ist.

a) Zeigen Sie: die Abbildung $t \mapsto \|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$ ist konstant (wenn Sie $u(\cdot,t) \in H^2(\mathbb{R})$ für jedes t annehmen).

b) Sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ symmetrisch. Zeigen Sie für die Spektralnorm $\|\cdot\|_2$:

$$\|(\mathrm{I} - k\mathbf{i}A)^{-1}(\mathrm{I} + k\mathbf{i}A)\mathbf{u}\|_2 = \|\mathbf{u}\|_2 \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^N.$$

c) Wir betrachten ein Splitting von der folgenden Form:

$$u_t = Au + Bu, \qquad Au = \mathbf{i}u_{xx}, \qquad Bu = \mathbf{i}|u|^2 u.$$

Zeigen Sie, daß die Gleichung $u_t = \mathbf{i}|u|^2 u$ geschlossen lösbar ist, d.h. ein Schritt der Länge k liefert:

$$u(x, t+k) = e^{\mathbf{i}k|u(t,x)|^2} u(x,t).$$

Bemerken Sie, daß $\|u(\cdot, t+k)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

4. (Fortsetzung "kubische Schrödingergleichung")

a) Formulieren Sie einen Schritt des Crank-Nicolson-Verfahren zur Lösung von

$$u_t = \mathbf{i}u_{xx}, \qquad u(0) = u_0$$

auf regelmäßigen Gittern (Schrittweite h). Die Ortsdiskretisierung von u_{xx} ist einfach $h^{-2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})$. Betrachten Sie periodische Randbedingungen. Zeigen Sie, daß "Energieerhaltung" gilt: Falls $\mathbf{u}^0 \in \mathbb{C}^N$ und $\mathbf{u}^1 \in \mathbb{C}^N$ die Vektoren sind, die zum Startwert und einem Schritt des Crank-Nicolson-Verfahrens gehören, dann gilt[1]

$$\|\mathbf{u}^1\|_2 = \|\mathbf{u}^0\|_2.$$

b) Programmieren Sie das Strang-Splitting für die Schrödingergleichung auf dem Intervall $[-20, 80]$. Verwenden Sie periodische Randbedingungen[2]. Als Eingabeparameter geben Sie den Zeitschritt k, den Ortsschritt und die Anzahl N der Zeitschritte vor. Der Startwert sei

$$u_0(x) = e^{\mathbf{i}x}\operatorname{sech}(x/\sqrt{2}) + e^{\mathbf{i}(x-25/20)}\operatorname{sech}((x-25)/\sqrt{2}).$$

($\operatorname{sech} x = 2/(e^x + e^{-x})$ — ist in Matlab bereits realisiert). Die Lösung (genauer: $|u(x)|$) sollte im wesentlichen aus 2 Pulse bestehen, die mit konstanter Form nach rechts laufen. Verwenden Sie $k = h = 0.1$ und $T = 200$ (d.h. $N = 2000$). Plotten Sie $|u(x)|$ zum Anfangs- und Endzeitpunkt. Plotten Sie auch die Energie $\|\mathbf{u}\|_2$ über der Zeit.

c) Wiederholen Sie Teilaufgabe e), indem Sie das Crank-Nicolson-Verfahren durch den impliziten Euler ersetzen. Was beobachten Sie für die Energie?

---

[1] skaliert man die beiden Seiten mit $\sqrt{h}$, dann sieht man, daß die Spektralnorm eine "Diskretisierung" der L^2-Norm darstellt. Daß das Crank-Nicolson-Verfahren eine Art Energieerhaltung ermöglicht ist nicht ganz verwunderlich: das CN ist das einstufige Gaußverfahren und die Gaußverfahren erhalten quadratische Invarianten.

[2] tatsächlich sind die Randbedingungen für das numerische Beispiel ziemlich irrelevant—warum?