Übungsblatt 2

Diskussion des Blattes: Fr., 21.3.2014

1. Betrachten Sie ein regelmäßiges Dreiecksgitter $\mathcal{T}$ auf $(0,1)^2$ (bestehend aus rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreiecken). Betrachten Sie $X_N = (S_0^{1,1}(\mathcal{T}))^2$ und $M_N = S^{0,0}(\mathcal{T})$. Geben Sie die Dimensionen von X_N und M_N an. Kann dieses Paar von Räumen für die Stokesbilinearform $b(\mathbf{u},p) = \int_\Omega p\nabla\cdot\mathbf{u}$ inf-sup stabil sein?

2. ("erweiterte Lagrangefunktionen") Man kann eine inf-sup Bedingung auch durch Modifikation der Bilinearform erzwingen. Das ist z.B. dann von Interesse, wenn die Konstruktion von inf-sup stabilen Paaren (X_N, M_N) mühsam ist. Seien X, Y Hilberträume und seien $a : X\times X \to \mathbb{R}$, $b : X\times Y \to \mathbb{R}$ stetige Bilinearformen mit folgenden Eigenschaften:

1. b ist definiert durch $b(x,y) = \langle \mathbf{B}x, y\rangle_Y$ für einen stetigen linearen Operator $\mathbf{B} : X \to Y$
2. b erfüllt die inf-sup-Bedingung
$$\inf_{0\neq v\in X}\sup_{0\neq u\in X}\frac{b(u,v)}{\|u\|_X\|v\|_X} > 0.$$
3. a ist nichtnegativ auf X (d.h. $a(u,u)\geq 0$ für alle $u\in X$) und koerziv auf Ker$\mathbf{B}$:
$$a(u,u)\geq \alpha_0\|u\|_X^2 \qquad \forall u\in \mathrm{Ker}\mathbf{B} := \{u\in X \mid b(u,v) = 0 \qquad \forall v\in X\}.$$

Zeigen Sie: für jedes $t>0$ existiert eine Konstante $\beta>0$, so daß die Bilinearform a_t gegeben durch $a_t(u,v) := a(u,v) + t^{-2}\langle \mathbf{B}u, \mathbf{B}u\rangle$ die Koerzivitätsbedingung
$$a_t(u,u)\geq \beta\|u\|_X^2 \qquad \forall u\in X$$
erfüllt.

3. *Hintergrund:* Eine etwas andere Art der Modikation der Bilinearform, um die inf-sup Bedingung zu gewährleisten, ist das sog. "Galerkin Least Squares" Verfahren. Will man für einen Differentialoperator $\mathcal{L}$ zweiter Ordnung eine Gleichung $\mathcal{L}u = f$ mit der (klassischen) FEM lösen, so kann man anstelle der "üblichen" Variationsformulierung $B(u_N, v) = l(v)$ auch die Formulierung: Finde $u_N\in X_N$ s.d.
$$B_\delta(u_N, v) := B(u_N,v) + \sum_{K\in\mathcal{T}}\delta_K\int_{K\in\mathcal{T}}\mathcal{L}u\mathcal{L}v = l(v) + \sum_{K\in\mathcal{T}}\delta_K f\mathcal{L}v$$
betrachten, wobei die Parameter $\delta_K\geq 0$ noch zu wählen sind. Betrachten Sie das Stokesproblem der VO:
$$-\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{auf } \Omega, \qquad \nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \quad \text{auf } \Omega, \qquad \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \int_\Omega p = 0.$$
Betrachten Sie mit der Bilinearform $B(\mathbf{u},p) := -\int_\Omega \nabla\cdot\mathbf{v}p$ mit $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ folgende Bilinearformen für das Stokesproblem der VO:
$$\begin{aligned}
\mathcal{B}((\mathbf{u},p),(\mathbf{v},q)) &:= \int_\Omega \nabla\mathbf{u}:\nabla\mathbf{v} + b(\mathbf{v},p) - b(\mathbf{u},q)\\
\mathcal{B}_\delta((\mathbf{u},p),(\mathbf{v},q)) &:= \mathcal{B}((\mathbf{u},p),(\mathbf{v},q) + \sum_{K\in\mathcal{T}}\delta_K\int_K(-\Delta(\mathbf{u}|_K) + \nabla p|_K)\cdot(-\Delta(\mathbf{v}|_K) + \nabla(q|_K)),\\
l_\delta(\mathbf{v},q) &:= \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} + \sum_{K\in\mathcal{T}}\delta_K\int_K \mathbf{f}(-\Delta(\mathbf{v}|_K) + \nabla(q|_K)),
\end{aligned}$$

wobei $\delta_K = h_K^2$ mit der Elementgröße h_K ist.

Beachten Sie: Die Notation $\Delta(\mathbf{u}|_K)$ etc. ist so zu verstehen, daß der Operator Δ *elementweise* angewendet wird. Damit sollten die Funktion $\mathbf{u}$ elementweise in H^2 sein und die Funktion p elementweise in H^1. Die Bilinearform $\mathcal{B}_\delta$ ist *nicht* auf $(H_0^1(\Omega))^2 \times L^2(\Omega)$ definiert (wie die Bilinearform B), aber auf dem diskreten Raum $\mathcal{X}_N \times \mathcal{X}_N$.

Betrachten Sie die diskrete Bilinearform $\mathcal{B}_\delta$ auf $\mathcal{X}_N \times \mathcal{X}_N$, wobei $\mathcal{X}_N = X_N \times M_N$ und $X_N = S_0^{1,1}(\mathcal{T})^2$ und $M_N = S^{1,1}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega)$.

a) Zeigen Sie, daß die Bilinearform $\mathcal{B}_\delta$ auf $\mathcal{X}_N \times \mathcal{X}_N$ koerziv in einer geeigneten Norm ist. Was ist diese Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{X}_N}$? Zeigen Sie, daß damit die FEM-Formulierung: Finde $(\mathbf{u}_N, p_N) \in \mathcal{X}_N$ s.d.

$$\mathcal{B}_\delta((\mathbf{u}_N, p_N), (\mathbf{v}_N, q)) = l_\delta(\mathbf{v}, q) \qquad \forall (\mathbf{v}, q) \in \mathcal{X}_N$$

eindeutig lösbar ist.

b) Sei die exakte Lösung $(\mathbf{u}, p)$ des Stokesproblems hinreichend glatt (z.B. $\mathbf{u} \in (H^2(\Omega))^2$ und $p \in H^1(\Omega)$ oder noch glatter). Zeigen Sie, daß das numerische Verfahren konsistent ist, d.h.

$$\mathcal{B}_\delta((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q)) = l_\delta(\mathbf{v}, q) \qquad \forall (\mathbf{v}, q) \in \mathcal{X}_N$$

Schließen Sie auf ein Bestapproximationsresultat für den Fehler $\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_N, p - p_N)\|_{\mathcal{X}_N}$. Welche Konvergenz erwarten Sie für $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\|_{H^1(\Omega)}$? Liefert die Methode Ihnen eine Aussage für den Fehler $\|p - p_N\|_{L^2(\Omega)}$? *Hinweis:* Es mag geschickter sein, nicht $\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_N, p - p_N)\|_{\mathcal{X}_N}$ zu betrachten, sondern $\|(I\mathbf{u} - \mathbf{u}_N, Ip - p_N)\|_{\mathcal{X}_N}$ mit einem beliebigen Approximanden $(I\mathbf{u}, Ip)$. Sie werden inverse Ungleichungen verwenden müssen.

4. Betrachten Sie (für ein glatt berandetes Lipschitzgebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$) das Randwertproblem

$$-\Delta u + \mathbf{b}(x) \cdot \nabla u + c(x) = f \quad \text{auf } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

für Funktionen $\mathbf{b}$, $c \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Geben Sie eine Variationsformulierung an, die auf $H_0^1(\Omega)$ basiert. Zeigen Sie, daß für Ihre Variationsformulierung eine Gårding-Ungleichung der Form

$$a(u, u) \geq C_1 \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 - C_0 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \qquad \forall u \in H^1(\Omega)$$

gilt.

5. Seien X, Y Banachräume und $K : X \to Y$ kompakt. Sei $(\Pi_N)_{N=0}^\infty$ eine Folge von linearen Operatoren $Y \to Y$ mit

$$\begin{aligned} \|\Pi_N\|_{Y \leftarrow Y} &\leq 1 & \forall N \\ \lim_{N \to \infty} (\mathrm{Id} - \Pi_N)\, y &= 0 & \forall y \in Y. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: $(\mathrm{Id} - \Pi_N)K$ konvergiert in Norm gegen Null, d.h. $\lim_{N \to \infty} \|(\mathrm{Id} - \Pi_N)K\| = 0$.