Übungsblatt 5

Diskussion des Blattes: Fr., 11.4.2014

1. In der VO haben wir für die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{auf } \Omega \times (0,T), \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0,T), \qquad u(0,\cdot) = u_0(\cdot)$$

eine Lösungsformel $u(t) = E(t)u_0$ angegeben.

a) Zeigen Sie: für $t > 0$ und $u_0 \in L^2(\Omega)$ gilt, daß die Funktion

$$t \mapsto E(t)u_0$$

in $C^1((0,\infty); H^1_0(\Omega))$ ist.
Bemerkung: das Argument zeigt dann sogar $C^\infty((0,\infty); H^1_0(\Omega))$—die Wärmeleitungsgleichung ist *glättend*.

b) Korrespondierend zur Glättungseigenschaft[1] ist die Instabilität der "Rückwärtswärmeleitungsgleichung". Zeigen Sie: Sei $t > 0$ fest und $u(t) = E(t)u_0$. Für beliebige $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ kann man ein $v \in H^1_0(\Omega)$ mit $\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \varepsilon_1$ finden, so daß $u(t) + v = E(t)\widetilde{u}_0$ für ein $\widetilde{u}_0$ mit $\|\widetilde{u}_0 - u_0\|_{L^2(\Omega)} > \varepsilon_2$.
Bemerkung: Diese Aussage korrespondiert mit der Beobachtung, daß es bei irreversiblen physikalischen Prozessen typischerweise unmöglich ist, zu einem späteren Zeitpunkt die "Anfangskonfiguration" in sinnvoller Weise zu ermitteln.

2. Geben Sie den (semidiskreten) Evolutionsoperator $E_h(t)$ mittels der diskreten Eigenfunktionen an. Zeigen Sie die Duhamelformel:

$$u_h(t) = E_h(t)u_{0,h} + \int_0^t E_h(t-s)\Pi^{L^2} f(s)\,ds.$$

3. Das Eulerverfahren und das Crank-Nicholson-Verfahren für das AWP $y' = f(t,y)$, $y(0) = y_0$ sind definiert durch die Rekurrenzen

$$\begin{aligned} \text{expl. Euler} \qquad & y^{n+1} = y^n + kf(t_n, y^n) \\ \text{impl. Euler} \qquad & y^{n+1} = y^n + kf(t_{n+1}, y^{n+1}) \\ \text{Crank-Nicholson} \qquad & y^{n+1} = y^n + kf(t_{n+1/2}, \tfrac{1}{2}(y^{n+1} + y^n)), \qquad t_{n+1/2} = \tfrac{1}{2}(t_{n+1} + t_n) \end{aligned}$$

a) Geben Sie eine explizite Formel für y^n an, wenn das das skalare AWP

$$y' = \lambda y, \qquad y(0) = y_0 \tag{1}$$

betrachtet wird. Ihre Formel definiert für jedes der 3 Verfahren die *Stabilitätsfunktion* $R(z)$ durch die Beziehung

$$y^{n+1} = R(z)y^n, \qquad z = \lambda k.$$

Geben Sie R an.

[1] vornehm: die Abbildung $u_0 \mapsto E(t)u_0$ als Abbildung $L^2(\Omega) \to H^1_0(\Omega)$ ist kompakt

b) Die Stabilitätsfunktion $R(z)$ ist für $z \in \mathbb{C}$ definiert. Das *Stabilitätsgebiet* S eines numerischen Verfahrens ist definiert als $S = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |R(z)| \leq 1\}$. Skizzieren Sie das Stabilitätsgebiet für die drei obigen Verfahren.

c) Sei $\lambda < 0$. Dann ist die exakte Lösung von (1) beschränkt für alle $t > 0$. Geben Sie die Schrittweite k an, so daß dieses qualitative Verhalten auch vom numerischen Verfahren geerbt wird.

d) Wenden Sie die drei obigen Verfahren auf das Diagonalsystem

$$\mathbf{y}' = -\mathbf{D}\mathbf{y}, \qquad \mathbf{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N), \qquad \lambda_i > 0 \qquad \forall i$$

an. Welche Schrittweitenbeschränkungen ergeben sich, damit das Verfahren sinnvolle Ergebnisse liefert?

4. Erstellen Sie ein MATLAB-Programm mit der Signatur

$$[\mathtt{u}] = \mathtt{heat\_eqn\_1D\_implicit\_euler}(\mathtt{x}, \mathtt{k}, \mathtt{K}, \mathtt{u0}, \mathtt{f}),$$

das eine Approximation an die Lösung des Problems

$$u_t - u_{xx} = f, \quad \text{auf } \Omega \times (0,T), \qquad u(x,t) = 0 \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T)$$

erzeugt. Dabei soll das implizite Eulerverfahren in der Zeit und klassische FEM im Ort verwendet werden. Hier ist x ein (sortierter) Vektor von Knoten, der das Ortsgitter beschreibt (d.h. $\Omega = (\mathtt{min}(x), \mathtt{max}(x))$). k ist die Zeitschrittweite, K ist die Anzahl Zeitschritte die durchgeführt werden soll. $u0$ ist ein Vektor (der Länge $\mathtt{length}(x) - 2$) mit Knotenwerten für den Startwert. f ist ein *function handle* für eine Funktion $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$, die die rechte Seite beschreibt. Die Ausgabe soll ein Vektor der Länge $\mathtt{length}(x) - 2$ sein, der aus den Knotenwerten der Approximation zum Zeitpunkt Kk besteht. Testen Sie Ihr Programm mit der exakten Lösung $u(x,t) = e^{-t}x(1-x)$ zum Zeitpunkt $T = 1$ und $k = 0.1h$ (sie sollten $O(h)$ sehen, wenn Sie als Fehlermaß $\sqrt{h}\sqrt{\sum_i |u(x_i,T) - u_i^K|^2}$ nehmen; dieses Fehlermaß imitiert die $L^2(\Omega)$-Norm).

5. Modifizieren Sie Ihr MATLAB-Programm aus Aufg. 4 so, daß Sie das explizite Eulerverfahren realisieren, und plotten Sie wieder den Fehler gegen die Ortsschritteweite h. Für die Zeitschrittweite k verwenden Sie zwei verschiedene Wahlen:

$$k = \frac{2.001}{\lambda_{max}}, \qquad k = \frac{1.999}{\lambda_{max}},$$

wobei λ_{max} der größte Eigenwert des EWP

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{M}\mathbf{x}$$

ist (hier sind $\mathbf{M}$ und $\mathbf{A}$ die Masse- und Steifigkeitsmatrix). Plotten Sie auch λ_{max} gegen die Ortsschrittweite h.

6. Sei $\theta \in C^1((0,T); V_h) \cap C([0,T]; V_h)$ und $r \in C([0,T]; V_h)$ mit

$$(\theta'(t), v)_{L^2(\Omega)} + a(\theta(t), v) = (r(t), v)_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v \in V_h.$$

(Mit $a(z,v) = (\nabla z, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$) Zeigen Sie:

$$|\theta(t)|^2_{H^1(\Omega)} \leq |\theta(0)|^2_{H^1(\Omega)} + \int_{s=0}^{t} \|r(s)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Hinweis: Versuchen Sie $v = \theta'$.

Bemerkung: Damit ergibt sich für die semidiskrete Lösung u_h die Abschätzung $|u(t) - u_h(t)|^2_{H^1(\Omega)} \leq 2|u(t) - P_h u(t)|^2_{H^1(\Omega)} + 2|u_{0,h} - P_h u_{0,h}|^2_{H^1(\Omega)} + 2\int_0^t \|u'(s) - P_h u'(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\, ds$.