Übungsblatt 7

Diskussion des Blattes: Fr., 9.5.2014

1. Zeigen Sie, daß das Bochner-Integral einer Funktion $f : (0,T) \to X$ wohldefiniert ist, d.h. für zwei Folgen $(f_n)_n$, $(g_n)_n$ einfacher Funktionen mit

$$\lim_n g_n(t) = f(t) = \lim_n f_n(t) \qquad \text{für fast alle } t \in (0,T)$$

und den zusätzlichen Bedingungen

$$\lim_{n\to 0} \int_0^T \|f(t) - f_n(t)\|_X = 0 = \lim_{n\to 0} \int_0^T \|f(t) - g_n(t)\|_X \, dt$$

folgt $\lim_n \int_0^T f_n(t)\,dt = \lim_n \int_0^T g_n(t)\,dt$ (wobei die Integrale von einfachen Funktionen in "natürlicher" Weise definiert sind).

2. Sei $\Omega = (0,1)$.

a) Sei $u \in C^1((0,T);X)$. Zeigen Sie: die (klassische) Ableitung u' ist auch die schwache Ableitung, d.h.

$$\int_0^T u(t)\varphi'(t)\,dt = -\int_0^T u'(t)\varphi(t)\,dt \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(0,T).$$

(alle Integrale sind natürlich X-wertige Bochnerintegrale).

b) Definieren Sie die Funktion $u \in L^2((0,T);L^2(\Omega))$ durch

$$u(t,x) := \frac{1}{t+\sqrt{x}} \qquad \text{genauer: } (u(t) := (x \mapsto= 1/(t+\sqrt{x}))$$

Zeigen Sie: $u \in C^1((0,T);L^2(\Omega))$ mit Ableitung $v(t,x) := -(t+\sqrt{x})^{-2}$ Damit ist u schwach differenzierbar. Ist $u' \in L^2((0,T);L^2(\Omega))$?

c) Betrachten Sie die Funktion $u(t) := \chi_{(0,t)}$, wobei $x \mapsto \chi_A(x)$ die charakteristische Funktion der Menge A ist. Offensichtlich ist $u \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Geben Sie die distributionelle Ableitung von u an, d.h. die lineare Abbildung

$$C_0^\infty(0,T) \ni \varphi \mapsto -\int_0^T u(t)\varphi'(t)\,dt$$

3. In der VO wurde der Raum $\widehat{H}^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \,|\, \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^m |(u,\varphi_n)_{L^2}|^2 < \infty\}$ definiert. Dieser Raum stimmt nicht mit $H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ überein. Zeigen Sie dies am Beispiel von $\Omega = (0,\pi)$ und $u(x) = x(\pi - x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$. (Die Fourierkoeffizienten können Sie mit MAPLE ausrechnen...)

4. Sei $E(t)$ der (kontinuierliche) Evolutionsoperator: $E(t)u_0 = \sum_{n=1}^\infty e^{-\lambda_n t}(u_0,\varphi_n)_{L^2}\varphi_n$. Zeigen Sie, daß für $u_0 \in L^2(\Omega)$ die Abbildung $t \mapsto E(t)u_0$ in $C^1((0,\infty);H_0^1(\Omega))$ ist. Zeigen Sie weiters:

$$\|E(t)u_0\|_{H^1(\Omega)} \le Ct^{-1/2}\|u_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

5. Sei $E_h(t)u_0 = \sum_{n=1}^N e^{-\lambda_{h,n} t}(u_0,\varphi_{h,n})_{L^2}\varphi_{h,n}$ der diskrete Evolutionsoperator. Zeigen Sie, daß für die Funktion $u_h(t) := \int_0^t E_h(t-s)f(s)\,ds$ gilt:

$$\|u_h(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \int_0^t \|u_h'(s)\|_{L^2}^2\,ds \le C\int_0^t \|\Pi^{L^2} f(s)\|_{L^2}^2\,ds$$